

Inhalt

1	Tensorrechnung	1
1.1	Historie und Literaturhinweise	1
1.2	Tensoralgebra	3
1.2.1	Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum	3
1.2.1.1	Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte	3
1.2.1.2	Skalare oder Tensoren nullter Stufe	4
1.2.1.3	Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe	4
1.2.1.4	Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe	7
1.2.1.5	Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten	9
1.2.2	Operationen für Tensoren zweiter Stufe	11
1.2.2.1	Symmetrische und antisymmetrische Tensoren	11
1.2.2.2	Tensormultiplikation	12
1.2.2.3	Der Einheitstensor und der Levi-Civita-Tensor	17
1.2.2.4	Die Spur eines Tensors zweiter Stufe	20
1.2.2.5	Vektorinvariante und assoziierter Vektor	21
1.2.2.6	Lineare Zuordnungen	23
1.2.2.7	Determinante eines Tensors	23
1.2.2.8	Inverser Tensor und Cayley-Hamilton-Theorem	25
1.2.2.9	Norm eines Tensors zweiter Stufe sowie Tensorreihen	28
1.2.3	Orthogonale Drehungen	29
1.2.3.1	Der Rotationstensor	31
1.2.3.2	Projektoren und Spiegelungstensoren	37
1.2.3.3	Anschauliches zu Spiegelungen, polaren und axialen Vektoren	38
1.2.4	Zerlegung von Tensoren zweiter Stufe	40
1.2.4.1	Spektrale Zerlegung eines Tensors	40
1.2.4.2	Zerlegung eines Tensors in Kugel- und Deviatoranteil	43
1.2.4.3	Polare Zerlegung	45
1.2.5	Tensoren höherer Stufe	48
1.2.5.1	Grundlegende Tensoroperationen	48
1.2.5.2	Symmetrie von Tensoren und isotrope Tensoren	50
1.2.5.3	Tensoren vierter Stufe und spezielle Tensorbasen	53

1.3	Tensorfunktionen	56
1.3.1	Einleitende Bemerkungen	56
1.3.2	Isotrope Funktionen und Invarianten von Tensorsystemen	57
1.3.3	Differentialoperationen	60
1.3.3.1	Differentiation von Tensoren nach einem skalaren Argument	60
1.3.3.2	Differentiation einer skalarwertigen Funktion	62
1.3.3.3	Ableitung einer Skalarfunktion nach einem Tensorargument..	67
1.4	Tensorfelder	70
1.4.1	Krummlinige orthogonale Koordinaten	70
1.4.2	Hamiltons Nabla-Operator	72
1.4.3	Differentialoperationen an einem Produkt	75
1.4.4	Zweite Ableitungen	77
1.4.5	Orthogonale Koordinatensysteme	79
1.4.5.1	Zylinderkoordinaten	79
1.4.5.2	Kugelkoordinaten	81
1.4.6	Integralausdrücke.....	84
1.4.6.1	Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral.....	84
1.4.6.2	Stokes'scher Satz	86
1.5	Nicht-orthogonale Koordinatensysteme	87
1.5.1	Haupt- und reziproke Basis.....	87
1.5.1.1	Basistransformationen	88
1.5.1.2	Metrik	89
1.5.2	Vektorprodukt und Tensordeterminante	91
1.5.3	Kovariante Differentiation	93
1.5.3.1	Der Nabla-Operator in nicht-orthogonaler Basis	93
1.5.3.2	Ableitungen von Basisvektoren und Christoffelsymbole	94
1.5.3.3	Umwandlung der Christoffelsymbole.....	97
1.5.3.4	Kovariante Differentiation eines Tensors zweiter Stufe	98
1.5.3.5	Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten	99
	Literatur	101

2 Grundbegriffe 103

2.1	Mathematische Beschreibung von Feldgrößen	103
2.1.1	Die Kontinuumshypothese	103
2.1.2	Raum, Zeit und Beobachter – Teil I	106
2.1.3	Räumliche oder Euler'sche Beschreibungsweise	109
2.1.4	Transporttheoreme volumetrischer Feldgrößen in räumlicher Darstellung.....	112

2.1.5	Transporththeoreme für Flussfeldgrößen in räumlicher Darstellung	116
2.1.6	Materielle oder Lagrange'sche Beschreibungsweise	119
2.2	Allgemeine Bilanzgleichungen	122
2.2.1	Bilanzen volumetrischer Feldgrößen – globale Formulierung	122
2.2.2	Bilanzen für Flußfeldgrößen – globale Formulierung	124
2.2.3	Bilanzen für Volumen und offene Flächen im singulären Fall	124
2.2.4	Materielle Zeitableitung	128
2.3	Raum, Zeit und Beobachter – Teil II	129
2.3.1	Das mathematische Pendel: eine Fundgrube zur Klärung der Begriffe Beobachter- und Koordinatenwechsel	129
2.3.2	Lösung im Inertialsystem und Koordinatensystemswechsel	130
2.3.3	Bezugssystemswechsel	134
2.3.4	Koordinaten- und Beobachterwechsel im Nichtinertialsystem	141
2.4	Die euklidische Beobachtertransformation	143
2.4.1	Begriffliches	143
2.4.2	Beobachter- vs. Koordinatenwechsel	144
2.4.3	Geschwindigkeit bei Beobachterwechsel	148
2.4.4	Beschleunigung bei Beobachterwechsel	153
	Literatur	155

3 Mechanik 157

3.1	Zielsetzung der Kontinuumsmechanik	157
3.2	Bilanzen der Kontinuumsmechanik	158
3.2.1	Massenbilanz	158
3.2.2	Teilchenzahlbilanz	164
3.2.3	Impulsbilanz	166
3.2.4	Bilanz der kinetischen Energie	169
3.2.5	Bilanz des Drehimpulses (moment of momentum)	170
3.2.6	Bilanz des Gesamtdrehimpulses (angular momentum)	173
3.2.6.1	Vorbemerkungen	173
3.2.6.2	Die Begriffe des verallgemeinerten linearen Impulses und des Spins	174
3.2.6.3	Die Bilanz des verallgemeinerten linearen Impuls	178
3.2.6.4	Die Bilanz des Gesamtdrehimpulses	179
3.2.6.5	Die Bilanz des Bahndrehimpulses	179
3.2.6.6	Die Bilanz des dynamischen Spins	180
3.2.6.7	Die Bilanz der kinetischen Energie für mikropolare Kontinua	180
3.2.6.8	Ein Beispiel zu den Möglichkeiten des Koppeltensors $\mathbf{B}$ und des Mikroträgheitstensors $\mathbf{J}$	181

3.3	Materialgleichungen einfacher Kontinua	183
3.3.1	Der linear-elastische Hooke'sche Festkörper	183
3.3.2	Das Navier-Stokes-Fourier-Fluid	186
3.4	Feldgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik	188
3.4.1	Vorbemerkungen	188
3.4.2	Die Navier-Lamé'schen partiellen Differentialgleichungen	189
3.4.3	Beispiel zu Navier-Lamé-Gleichungen	189
3.4.4	Bewegungsgleichungen für ein reibungsfreies Fluid (Eulerfall)	191
3.4.5	Beispiel zum reibungsfreien Eulerfluid	191
3.4.6	Die Navier-Stokes'schen partiellen Differentialgleichungen	194
3.4.7	Beispiel zu Navier-Stokes-Gleichungen	195
3.5	Materialgleichungen polarer Kontinua	196
3.5.1	Der lineare isotrope mikropolare Festkörper	196
3.5.2	Feldgleichungen für mikropolare Festkörper	198
3.5.3	Beispiel für den mikropolaren Festkörper	199
3.5.4	Viskose Fluide mit Momentenspannungen	201
3.5.5	Feldgleichungen für polare Fluide	203
3.5.6	Beispiel für polare Fluide	203
3.6	Mechanische Felder und euklidischer Beobachterwechsel	206
3.6.1	Der Distanzvektor	206
3.6.2	Nochmals polare und axiale Vektoren und Tensoren	209
3.6.3	Der Gradient oder Nabla-Operator	216
3.6.4	Der Geschwindigkeitsgradient und seine Varianten	216
3.6.5	Das Feld der Dichte und die Massenbilanz	218
3.6.6	Volumen-, Oberflächenkraft und Spannungstensor	220
3.6.7	Felder der Spinbilanz	221
3.6.8	Die Impulsbilanz	222
3.6.9	Hooke'sches Gesetz	223
3.6.10	Navier-Stokes-Materialgleichung	224
3.6.11	Momentenspannungstensor	224
	Literatur	225

4 Thermodynamik **227**

4.1	Energiebilanzen	227
4.1.1	Bilanz der Gesamtenergie für klassische Kontinua	227
4.1.2	Bilanz der inneren Energie	229
4.1.3	Bilanz der Gesamtenergie für mikropolare Kontinua	230
4.1.4	Bilanz der inneren Energie für mikropolare Kontinua	230

4.2	Entropie	231
4.2.1	Ein erster Zugang zur Entropie nach Eckart	232
4.2.2	Entropiebilanz und 2. Hauptsatz der Thermodynamik	243
4.3	Auswertung der Entropieungleichung	244
4.3.1	Thermodynamik irreversibler Prozesse: die Kraft-Fluss-Methode	244
4.3.1.1	Vorbemerkungen	244
4.3.1.2	Thermodynamische Kräfte und Flüsse	245
4.3.1.3	Kritik der Kraft-Fluss-Methode	250
4.3.1.4	Kraft-Fluss-Methode und Stabilität	250
4.3.1.5	Thermodynamische Stabilität	254
4.3.2	Das Verfahren nach Coleman-Noll	260
4.3.2.1	Vorbemerkungen	260
4.3.2.2	Der Fall des linear-elastischen Festkörpers	260
4.3.2.3	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit	264
4.3.3	Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	266
4.3.3.1	Vorbemerkungen	266
4.3.3.2	Zustandsraum und Darstellung der Materialfunktionen, Isotropieprinzip	266
4.3.3.3	Formulierung des Entropieprinzips und ergänzende Bemerkungen	271
4.3.3.4	Die Auswertung des Entropieprinzips	273
4.3.4	Die Methode der reduzierten Energiebilanz nach Zhilin	281
4.3.4.1	Vorbemerkungen	281
4.3.4.2	Materielle Zeitableitungen und integrierender Faktor	283
4.3.4.3	Legendretransformationen und die freie Energie	288
4.3.4.4	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in verschärfter Form ..	289
4.3.5	Materialgleichungen für mikropolare Medien	290
4.3.5.1	Reduzierte Form der Bilanz für die innere Energie	290
4.3.5.2	Cauchy-Green-Beziehungen für mikropolare Medien	292
4.3.5.3	Fourier- und Planck-Ungleichungen für mikropolare Medien	292
4.4	Thermodynamische Felder und euklidischer Beobachterwechsel	293
4.4.1	Euklidische Skalare	293
4.4.2	Euklidische Vektoren	293
4.4.3	Bilanz der inneren Energie	293
Literatur		294

5 Elektrodynamik	297
5.1 Das Induktionsgesetz oder der erste Satz der Maxwell'schen Gleichungen	298
5.1.1 Experimentelle Beobachtungen	298
5.1.2 Mathematische Verallgemeinerung	302
5.2 Ladungserhaltung oder der zweite Satz der Maxwell'schen Gleichungen	316
5.2.1 Der experimentelle Nachweis	316
5.2.2 Ladungs- und Strompotential	318
5.3 Dimensionen und Einheiten der elektromagnetischen Felder	327
5.3.1 Die Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen	327
5.3.2 Das Coulomb'sche und das Biot-Savart'sche Gesetz neu betrachtet	328
5.4 Transformationseigenschaften der elektromagnetischen Felder	338
5.4.1 Weltensornotation der Maxwell-Gleichungen	338
5.4.2 Euklidische Transformationen und objektive Tensoren des Elektromagnetismus	342
5.4.3 The Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen und die Lorentz-Transformationen	345
5.5 Polarisation und Magnetisierung	352
5.5.1 Additive Zerlegung von Ladungs- und Stromdichten	352
5.5.2 Einfachste Materialgleichungen für Polarisation und Magnetisierung..	354
5.6 Unstetigkeiten bei elektromagnetischen Feldern	357
5.6.1 Bilanzen für Volumen und offene Flächen, die von singulären Flächen und singulären Linien durchquert werden	357
5.6.2 Sprungbilanzen der elektromagnetischen Felder in der Physik	359
5.7 Der Äther, verschiedene Arten der Zeitdifferentiation und andere kuriose Dinge aus der Elektrodynamik	361
5.7.1 Der Äther	361
5.7.2 Verschiedene Arten der Zeitableitung	367
Literatur	370
Abbildungsverzeichnis	376
Index	379