

A 17

Differentialrechnung mehrerer Variabler

A17.1 Partielle Ableitungen

Aufgabe A17.1.1

Für die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

- a) $f(x, y) = 2x + 3y$, b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^4)$, d) $f(x, y) = 8 - 3x \sin y$.

Aufgabe A17.1.2

- a) Für die durch folgende Funktionswertzuweisung definierten Funktionen

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

gebe man den maximalen Definitionsbereich D an und berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

- b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0).$$

Man bestimme jeweils die Tangentialebene für f und g aus a) im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

Aufgabe A17.1.3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x + e^{x+2y}$.

- a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
 b) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1/2)$.
 c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0, 0)$ läuft.
 d) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad } f(0, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe A17.1.4

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Man bestimme die Höhenlinie durch den Punkt $(1, 1)$.
- Man berechne $\text{grad } f$ im Punkt $(1, 1)$.
- Man zeige, dass $\text{grad } f(1, 1)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor der Höhenlinie im Punkt $(1, 1)$ steht.
- Man zeichne a)–c).

Aufgabe A17.1.5

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y\sqrt{2x^2 + y^2}$.

- Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f .
- Man überprüfe, ob f eine C^1 -Funktion ist.
- Man berechne f_{xy} und f_{yx} und bestimme den Definitionsbereich dieser Ableitungen.

Aufgabe A17.1.6

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig bzw. stetig ergänzbar ist.
- Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0,5, 0,5] \times [-1, 1]$.
- Man berechne alle Richtungsableitungen von f .
- und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe A17.1.7

a) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2}$.

- Man zeichne die Funktion.
 - Man weise die Stetigkeit von f in ganz $\mathbb{R}^2$ nach.
 - Man berechne die partiellen Ableitungen von f in ganz $\mathbb{R}^2$, sofern dies möglich ist.
- b) Man berechne die Gradienten der folgenden Abbildungen
- $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \sin(x^2 - y^3)$,
 - $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y, z) = \frac{xy}{z^4 + 1}$.

Klausuraufgabe A17.1.8

- Man berechne die Tangentialebene der durch $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ gegebenen Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
- Für die durch $f(x, y) = \sin(\pi x^2 + \pi y)$ gegebene Funktion berechne man im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ den Anstieg in x - und y -Richtung und die Tangentialebene.

Aufgabe A17.1.9

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt positiv homogen vom Grad k , falls für alle $t > 0$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$. Man gebe ein Beispiel für eine positiv homogene Funktion vom Grad 3 an.

A17.2 Differentialoperatoren**Aufgabe A17.2.1**

Für die folgenden Vektorfelder $\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T$ berechne man jeweils Quelledichte $\operatorname{div} \mathbf{U}$ und Wirbelstärke $\operatorname{rot} \mathbf{U}$:

- a) $u(x, y, z) = \sin(x + y + z)$, $v(x, y, z) = \cos(x + y + z)$, $w(x, y, z) = 0$,
- b) $u(x, y, z) = y^2 + z^2$, $v(x, y, z) = x^2 + z^2$, $w(x, y, z) = x^2 + y^2$,
- c) $u(x, y, z) = \frac{1}{x}$, $v(x, y, z) = \frac{1}{y}$, $w(x, y, z) = \frac{1}{z}$,
- d) $u(x, y, z) = 1$, $v(x, y, z) = 1$, $w(x, y, z) = 1$.

Aufgabe A17.2.2

- a) Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{f}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x \cosh y, x^2 \sinh y - z^3 \sin y, x + 3z^2 \cos y)^T.$$

- b) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 2x)^T$.
- i) Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{g}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ und
 - ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien.

Aufgabe A17.2.3

- a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y, z) &= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T \\ &:= (\lambda x^2 + xz, -xy - yz - \lambda y^2, yz)^T. \end{aligned}$$

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{f}$ wirbelfrei und für welche quellenfrei?

- b) Gegeben sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$. Man berechne $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ und gebe ein Beispiel an, mit $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \neq 0$.

Aufgabe A17.2.4

- a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ mit $k > 0$ für eine Ortsvariable gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$.
- b) Man zeige, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ die Funktion $u(r, t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$ die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Aufgabe A17.2.5

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = 3 \ln(x + ct) - 5 \tan(x - ct)$.

- b) Man zeige, dass die Funktion $u(x, y) = e^y \cos x + a + bx + cy + dxy$ mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

A17.3 Das vollständige Differential

Aufgabe A17.3.1

Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = xz - y^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$. Man bestimme für (x_0, y_0, z_0) den Funktionswert von f , berechne eine Funktionswertnäherung für $f(3, 1, -1, 2, 1, 9)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in (x_0, y_0, z_0) und vergleiche diese mit $f(3, 1, -1, 2, 1, 9)$.

Aufgabe A17.3.2

In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0,5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?

Hinweis: Man linearisiere die Funktion.

Aufgabe A17.3.3

Für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man direkt ableite:

a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$ mit $f_1(x, y) = xy$ und $f_2(t) = e^t$

b) $g(x, y, z) = g_2(g_1(x, y, z))$ mit $g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

$$\text{mit } g_2(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ u + v \\ \sin(u + v) \end{pmatrix},$$

c) $h(t) = h_2(h_1(t))$ mit $h_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $h_2(x, y) = x^2 + y^2$.

Aufgabe A17.3.4

Man berechne die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel:

- a) $f(x, y): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 \mapsto \sin(x^2 + y^2),$
- b) $g(t): t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T,$
- c) $h(u, v): \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y,$
- d) $p(u, v): \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2 y^2 z \end{pmatrix}.$

Aufgabe A17.3.5

Gegeben sei eine quadratische Funktion $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

- a) Man zeige: $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$.
- b) Man sagt, dass $\mathbf{s}$ eine *Abstiegsrichtung* von f im Punkt $\mathbf{x}$ ist, falls für $\mathbf{s}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} < 0$ erfüllt ist.
Für die Funktion $\Phi(\alpha) := f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{s})$ berechne man $\Phi'(\alpha)$ und zeige, dass $\Phi(\alpha)$ ein eindeutig bestimmtes Minimum besitzt in

$$\alpha^* = -\frac{\mathbf{s}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})}{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s}}.$$

- c) Man zeige, dass das Verfahren des steilsten Abstiegs auf folgende Rekursion führt:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{A} \mathbf{g}_k} \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{g}_k := \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}.$$

Aufgabe A17.3.6

Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

- a) Man stelle f in der Form $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ dar und überprüfe, ob $\mathbf{A}$ positiv definit ist.
- b) Man erstelle eine Höhenlinienzeichnung von f im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- c) Ausgehend vom Startpunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ führe man zwei Schritte des Gradientenverfahrens durch.

Aufgabe A17.3.7

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5$.

- a) Man bestimme die Höhenlinie von f durch den Punkt $\mathbf{x}^0 = (-1, 3)^T$. Von welchem Typ ist der Kegelschnitt?

- b) Man berechne die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ für $\mathbf{v} = (1, 1)^T / \sqrt{2}$. Für welches $\mathbf{v}$ mit $\|\mathbf{v}\| = 1$ wird die Richtungsableitung maximal?

Aufgabe A17.3.8

Mit $\Phi: (0, R] \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind die Polarkoordinaten gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Spektralnorm von $J\Phi(r, \varphi)$ und zeige mit Hilfe des Mittelwert-Abschätzungssatzes, dass Φ Lipschitzstetig auf $(0, R] \times (-\pi, \pi]$ ist.

Aufgabe A17.3.9

Die Kugelkoordinaten $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $D = (0, R] \times (-\pi, \pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\mathbf{u} = (r, \varphi, \theta)^T$ sind gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- a) Man berechne $\|J\Phi(\mathbf{u})\|_2$.
 b) Man finde eine möglichst kleine Konstante K , so dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ aus dem angegebenen Bereich gilt:

$$\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v})\|_2 \leq K \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2.$$

Aufgabe A17.3.10

Gegeben seien die Zylinderkoordinaten

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) Man berechne die Jacobi-Matrix $J\Phi$ und die zugehörige Transformationsdeterminante $\det J\Phi$.
 b) Man leite die folgende Darstellung des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten elementar unter Verwendung der Kettenregel her:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Aufgabe A17.3.11

Man berechne $\det(\Phi'(\mathbf{u}))$ für die folgenden Abbildungen Φ :

- a) $\Phi(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{u} = (x, y)^T$ (Lineare Abbildung);

b) $\Phi(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} xy \cos \varphi \\ xy \sin \varphi \\ \frac{x^2 - y^2}{2} \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{u} = (x, y, \varphi)^T$ (Rotationsparabolische Koordinaten).

Aufgabe A17.3.12

Gegeben seien die Hyperbelkoordinaten Φ mit $(u, v) \in D := [0, 5] \times [1, 3]$ und

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

- Man berechne $J\Phi(x, y)$ und $\det(J\Phi(x, y))$ sowie
- bzgl. D : $\Phi^{-1}(u, v)$, $J\Phi^{-1}(u, v)$ und $\det(J\Phi^{-1}(u, v))$.
- Man skizziere $\Phi^{-1}(D)$ im (x, y) -Koordinatensystem.
- Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. Hyperbelkoordinaten.

A17.4 Mittelwertsätze und Taylorscher Satz

Aufgabe A17.4.1

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \frac{1}{5}(x^3 + yx^2 - y)$.

- Man begründe, dass es kein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Jf(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}$, wobei $\mathbf{h} = (2, 1)^T$ und $\mathbf{a} = (0, 0)^T$.
- Man überprüfe, ob f bezüglich der Maximumnorm auf $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist.
- Ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (1, 1)$ führe man drei Schritte des Fixpunktverfahrens durch und verschaffe sich außerdem einen Überblick über alle Fixpunkte durch Lösen der Fixpunktgleichung.

Aufgabe A17.4.2

Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, \pi, 0)$ der folgenden Funktion $f(x, y, z) = \sin(y - x) + e^{x-y+2z}$.

Klausuraufgabe A17.4.3

Man bestimme für die Funktion $f(x, y) = 1 + \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ die Taylor-Polynome $T_1(x, y; x_0, y_0)$ und $T_2(x, y; x_0, y_0)$ zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Klausuraufgabe A17.4.4

Gegeben sei die durch $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ definierte Funktion. Man bestimme das Taylor-Polynom zweiten Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Klausuraufgabe A17.4.5

Für die durch $f(x, y) = e^{xy}$ definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Aufgabe A17.4.6

Man berechne das Taylor-Polynom $T_3(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion $f(x, y) = \cos x \sin y e^{x-y}$ zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$

- a) unter Verwendung des Satzes von Taylor,
- b) mit Hilfe der Taylor-Reihen der verwendeten elementaren Funktionen in einer Dimension.

Aufgabe A17.4.7

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9$.

- a) Man berechne das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
- b) Man gebe eine obere Schranke an nach der Restgliedformel von Lagrange für den Abstand im Nullpunkt zwischen der Funktion und der Tangentialebene im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Abstand.

Aufgabe A17.4.8

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin x \sin y + \cos y$.

- a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$.
- b) Man berechne das Taylor-Polynom 3. Grades von f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ unter Verwendung des Satzes von Taylor.
- c) Man ermittle das Taylor-Polynom 3. Grades unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklungen von $\sin$ und $\cos$ in einer Veränderlichen.
- d) Man schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi]$ nach oben ab.

Klausuraufgabe A17.4.9

Für die durch $f(x, y) = (x + 1)^2 + x \sin(x + y)$ definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x, y) = (\pi, \pi)$ verwendet, nach oben ab.