

Auf einen Blick

Einleitung	25
Teil I: Grundlagen	29
Kapitel 1: Die Entstehung der Mathematik.....	31
Kapitel 2: Mengen, Zahlenmengen und die Mengenschreibweise	35
Kapitel 3: Grundrechenarten.....	55
Kapitel 4: Bruchrechnen	65
Kapitel 5: Algebra – Rechnen mit (dem) Unbekannten.....	75
Kapitel 6: Potenzrechnung.....	93
Kapitel 7: Wurzeln und Wurzelrechnung.....	103
Kapitel 8: Logarithmus.....	115
Kapitel 9: Trigonometrie.....	125
Kapitel 10: Lösen von Gleichungen	131
Teil II: Analysis	155
Kapitel 11: Funktionen.....	157
Kapitel 12: Steigung	185
Kapitel 13: Kurvendiskussion: Funktionen untersuchen.....	211
Kapitel 14: Optimierungsaufgaben und Funktionsscharen	225
Kapitel 15: Integralrechnung.....	237
Kapitel 16: Lineare Gleichungssysteme I und Rekonstruktion	257
Teil III: Lineare Algebra und analytische Geometrie	275
Kapitel 17: Grundlagen der Linearen Algebra.....	277
Kapitel 18: Lineare Gleichungssysteme II und lineare (Un-)Abhängigkeit.....	297
Kapitel 19: Geraden	311
Kapitel 20: Ebenen.....	319
Kapitel 21: Lagebeziehungen und Schattenwurf.....	331
Kapitel 22: Abstände und Schnittwinkel.....	347
Teil IV: Stochastik	361
Kapitel 23: Grundlagen der Stochastik.....	363
Kapitel 24: Zufallsexperimente	381
Kapitel 25: Bedingte Wahrscheinlichkeiten.....	395
Kapitel 26: Zufallsvariablen.....	405
Kapitel 27: Hypothesentests	421
Teil V: Der Top-Ten-Teil	427
Kapitel 28: Zehn Tipps für die Prüfungsvorbereitung.....	429
Lösungen	433
Abbildungsverzeichnis	501
Stichwortverzeichnis	507

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	25
Über dieses Buch	25
Wie dieses Buch aufgebaut ist	26
Teil I: Grundlagen	26
Teil II: Analysis	26
Teil III: Lineare Algebra und analytische Geometrie	26
Teil IV: Stochastik	26
Törichte Annahmen über die Leser	27
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	27
Wie es weitergeht	28
 TEIL I	
GRUNDLAGEN	29
Kapitel 1	
Die Entstehung der Mathematik	31
Die Anfänge der Mathematik: Das Zählen	31
Die erste mathematische Schrift	32
Das deduktive System	33
 Kapitel 2	
Mengen, Zahlenmengen und die Mengenschreibweise	35
Mengen: Eine Definition	36
Darstellung von Mengen	36
Mengenverknüpfungen	38
Teilmenge	38
Vereinigungsmenge	39
Schnittmenge	41
Differenzmenge	41
Komplementärmenge	42
Zahlenmengen	43
Natürliche Zahlen	43
Ganze Zahlen	44
Rationale Zahlen	45
Irrationale Zahlen	46
Reelle Zahlen	46
Mathematische Mengenschreibweise	47
Intervalle	49
Aufgaben	52

Kapitel 3

Grundrechenarten	55
Addition	55
Kommutativgesetz	56
Assoziativgesetz	56
Das neutrale Element der Addition Null	56
Inverses Element der Addition (Gegenzahl)	56
Subtraktion	56
Subtraktion ist nicht kommutativ	57
Subtraktion der Null	57
Multiplikation	57
Kommutativgesetz	58
Assoziativgesetz	58
Das neutrale Element der Multiplikation Eins	58
Multiplikation mit null	59
Der Satz vom Nullprodukt	59
Division	60
Division ist nicht kommutativ	60
Division durch das neutrale Element der Multiplikation	60
Division durch null	60
Punkt vor Strich	62
Negative Zahlen	62
Aufgaben	63

Kapitel 4

Bruchrechnen	65
Was einen Bruch ausmacht – eine Definition	65
Rechenregeln für Brüche	67
Multiplikation von Brüchen	67
Multiplikation eines Bruchs mit einer Zahl oder Unbekannten	67
Division von Brüchen	68
Erweitern von Brüchen	69
Addition und Subtraktion von Brüchen	69
Kürzen von Brüchen	71
Aufgaben	73

Kapitel 5

Algebra – Rechnen mit (dem) Unbekannten	75
Terme, Gleichungen und deren Umformungen	76
Definition Term	76
Gleichungen	77
Ungleichungen	78
Klammern in der Algebra	80
Termumformung	80
Äquivalenzumformungen	81

Rechenregeln der Algebra	82
Distributivgesetze	82
Die drei binomischen Formeln	85
Klammern mit mehreren Summanden	88
Klammern mit höheren Exponenten	89
Anwendung: Ausklammern/Faktorisieren	90
Aufgaben	91
Kapitel 6	
Potenzrechnung	93
Definition einer Potenz	93
Potenzgesetze	94
Multiplikation von Potenzen	94
Division von Potenzen	95
Potenzieren von Potenzen	95
Potenzen von Produkten	96
Potenzen von Brüchen	97
Hoch null	98
Potenzen mit negativen Exponenten	98
Potenzen und Wurzeln	99
Übersichtliche Zusammenfassung	101
Aufgaben	101
Kapitel 7	
Wurzeln und Wurzelrechnung	103
Definition der Wurzel	104
Rechenregeln für Wurzeln	105
Produktregel	105
Quotientenregel	106
Verschachtelungsregel	106
Zusammenfassung	107
Wurzeln und negative Zahlen	108
Terme mit Variablen unter der Wurzel	110
Partielles Wurzelziehen	111
Aufgaben	113
Kapitel 8	
Logarithmus	115
Wozu man den Logarithmus verwendet	116
Spezielle Logarithmen	119
Eigenschaften von Logarithmen und Rechenregeln für Logarithmen	119
Logarithmen und negative Zahlen	119
Logarithmusgesetze	120
Basisumrechnung	121

16 Inhaltsverzeichnis

Logarithmieren zum Lösen von Exponentialgleichungen	122
Potenzieren zum Lösen von Logarithmusgleichungen	122
Aufgaben	123

Kapitel 9

Trigonometrie	125
Definition eines Dreiecks	125
Satz des Pythagoras	127
Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck	127
Aufgaben	130

Kapitel 10

Lösen von Gleichungen	131
Lösen von Gleichungen	132
Ganzrationale Gleichungen	133
Potenzgleichungen	134
Ganzrationale Gleichungen 1. Grades	135
Ganzrationale Gleichungen 2. Grades	136
Ganzrationale Gleichungen 3. Grades	140
Ganzrationale Gleichungen 4. Grades	142
Biquadratische Gleichungen	142
Ganzrationale Gleichungen höheren Grades	143
Gebrochenrationale Gleichungen	144
Exponentialgleichungen	144
Exponentialgleichungen mit einer Basis ungleich e	145
e -Gleichungen	146
Logarithmus-Gleichungen	148
Trigonometrische Gleichungen	150
Aufgaben	151

TEIL II

ANALYSIS	155
-----------------------	------------

Kapitel 11

Funktionen	157
Definition Funktion	158
Darstellungsformen von Funktionen	158
Graphen zeichnen in der Abiturprüfung	163
Verkettung von Funktionen	163
Transformation von Funktionen	164
Wichtige Funktionstypen	165
Ganzrationale Funktionen	166
Ganzrationale Funktionen ersten Grades	166
Ganzrationale Funktionen zweiten Grades	168
Ganzrationale Funktionen dritten Grades	170

Ganzrationale Funktionen vierten Grades.....	172
Biquadratische Funktionen.....	173
Gebrochenrationale Funktionen.....	174
Wurzelfunktionen.....	175
Exponential-Funktionen.....	176
Exponentialfunktionen (allgemein).....	176
e-Funktionen.....	177
Logarithmus-Funktionen.....	178
Logarithmus-Funktionen (allgemein).....	178
ln-Funktionen.....	178
Trigonometrische Funktionen.....	179

Kapitel 12

Steigung.....	185
Definition der Steigung.....	186
Steigung von Geraden.....	186
Steigung einer Geraden durch zwei Punkte.....	187
Aufstellen der Funktionsgleichung einer Geraden durch zwei Punkte.....	188
Steigung von Kurven.....	189
Mittlere Steigung von Funktionen.....	189
Lokale Steigung.....	191
h-Methode.....	192
Anwendung der h-Methode an einem einfachen Beispiel.....	194
Grundlegende Ableitungsregeln.....	195
Potenzregel.....	196
Faktorregel.....	196
Summenregel.....	197
Spezielle Ableitungen.....	197
Anwendung der Potenz-, Faktor- und Summenregel.....	198
Kettenregel.....	199
Produktregel.....	201
Verknüpfung Produkt- und Kettenregel.....	202
Das Produkt einer Funktion mit einer verketteten Funktion.....	203
Eine verkettete Funktion, welche das Produkt von Funktionen als innere Funktion besitzt.....	204
Graphisches Ableiten.....	204
Besondere Stellen der Ableitungsfunktion.....	207
Graphische Ableitung am Beispiel.....	207
Aufgaben.....	208

Kapitel 13

Kurvendiskussion: Funktionen untersuchen.....	211
Kurvendiskussion anhand eines Beispiels.....	213
Definitionsbereich D_f	213
Symmetrie.....	213
y-Achsenabschnitt: Schnittpunkt mit y-Achse.....	215

18 Inhaltsverzeichnis

Nullstellen: Schnittpunkte mit der x -Achse.....	215
Extrempunkte.....	216
Wendepunkte.....	217
Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$	218
Graph der Funktion.....	220
Wertebereich W_f	221
Monotonie- und Krümmungsverhalten.....	221
Aufgaben.....	224
Kapitel 14	
Optimierungsaufgaben und Funktionsscharen.....	225
Optimierungsaufgaben.....	226
Lösung des Optimierungsproblems.....	226
Zielfunktion.....	227
Nebenbedingungen.....	227
Extremalfunktion.....	228
Extremwert bestimmen.....	228
Lösung angeben.....	229
Übersicht der Vorgehensweise.....	229
Funktionsscharen.....	230
Aufgaben.....	234
Kapitel 15	
Integralrechnung.....	237
Einführung in die Integralrechnung: Ober- und Untersummen.....	237
Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.....	241
Grundlegende Integrationsregeln.....	242
Potenzregel.....	242
Faktorregel.....	242
Summenregel.....	243
Konstante Funktion.....	243
Anwendung: Flächenberechnung bei ganzrationalen Funktionen.....	244
Spezielle Stammfunktionen.....	245
Integration durch lineare Substitution.....	245
Besondere Flächenberechnungen.....	248
Flächen unterhalb der x -Achse.....	248
Flächen zwischen Funktionen.....	248
Stammfunktion angeben.....	251
Integralrechnung im Sachzusammenhang.....	252
Nachweis einer Stammfunktion.....	254
Aufgaben.....	254
Kapitel 16	
Lineare Gleichungssysteme I und Rekonstruktion.....	257
Definition lineare Gleichungssysteme.....	258
Darstellung linearer Gleichungssysteme.....	258

Die Lösung linearer Gleichungssysteme	260
Lösen von linearen Gleichungssystemen	261
Idee des Gauß-Algorithmus	261
Elementare Zeilenumformungen	261
Multiplikation mit einer Zahl	262
Addition zweier Gleichungen	262
Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung	263
Addition des Vielfachen einer Gleichung zu dem Vielfachen einer anderen Gleichung	264
Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren	265
Lösen von linearen Gleichungssystem mit dem Taschenrechner	269
Rekonstruktion von Funktionen	269
Aufgaben	272

TEIL III

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE 275

Kapitel 17

Grundlagen der Linearen Algebra 277

Vektoren	278
Ortsvektor	282
Länge eines Vektors	283
Winkel von Vektoren	285
Zusammenfassung und Übersicht	286
Vektoraddition	286
Skalarmultiplikation	288
Streckung und Stauchung von Vektoren durch Skalarmultiplikation	289
Skalarmultiplikation mit $r = 0$	289
Skalarmultiplikation mit $r < 0$	289
Verbindungsvektor	290
Skalarprodukt	291
Länge einer Strecke	293
Berechnungen am Dreieck	293
Mittelwerte	295
Aufgaben	296

Kapitel 18

Lineare Gleichungssysteme II und lineare

(Un-)Abhängigkeit 297

Über- und unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	298
Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	298
Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	300
Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	301
Zwei Vektoren	301
Drei Vektoren	305
Aufgaben	308

Kapitel 19

Geraden..... 311

 Definition von Geraden..... 311

 Gerade durch zwei Punkte..... 313

 Interpretation der Geradengleichung 314

 Punktprobe 317

 Aufgaben 318

Kapitel 20

Ebenen..... 319

 Was eine Ebene ausmacht..... 319

 Parameterform..... 320

 Normalenform..... 323

 Koordinatenform 327

 Spezielle Ebenen und ihre Gleichungen 328

 Aufgaben 330

Kapitel 21

Lagebeziehungen und Schattenwurf..... 331

 Lagebeziehung Gerade-Gerade..... 332

 Rechnerische Untersuchung..... 334

 Identische Geraden..... 335

 Parallele Geraden 336

 Schneidende Geraden..... 337

 Windschiefe Geraden..... 339

 Übersichtliche Darstellung der Vorgehensweise..... 340

 Lagebeziehung Gerade-Ebene 340

 Rechnerische Untersuchung..... 341

 Gerade parallel zur Ebene..... 342

 Gerade in der Ebene 342

 Gerade schneidet Ebene..... 343

 Ebene-Ebene 343

 Schattenwurf..... 343

 Aufgaben 345

Kapitel 22

Abstände und Schnittwinkel..... 347

 Abstand Punkt-Punkt..... 348

 Abstand Punkt-Ebene 348

 Formel zur Abstandsberechnung..... 349

 Lotfußpunktverfahren..... 350

 Abstand Gerade-Ebene..... 351

 Abstand Ebene-Ebene..... 353

 Weitere Abstände..... 354

 Schnittwinkel..... 354

Schnittwinkel zwischen zwei Vektoren.....	354
Schnittwinkel zwischen zwei Geraden.....	355
Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.....	356
Schnittwinkel zwischen einer Gerade und einer Ebene.....	357
Aufgaben.....	359

TEIL IV

STOCHASTIK..... 361

Kapitel 23

Grundlagen der Stochastik..... 363

Stochastik.....	364
Wahrscheinlichkeitstheorie.....	364
Statistik.....	364
Beschreibende/deskriptive Statistik.....	365
Schließende/induktive Statistik.....	365
Kennzahlen.....	365
Arithmetisches Mittel.....	366
Varianz und Standardabweichung.....	366
Median.....	366
Kennzahlen am Beispiel.....	367
Fakultät.....	369
Das Urnenmodell.....	369
Ziehen von Kugeln.....	370
Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge.....	370
Mit Zurücklegen.....	370
Ohne Zurücklegen.....	371
Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge.....	372
Mit Zurücklegen.....	372
Ohne Zurücklegen.....	372
Größeres Beispiel.....	373
Übersichtliche Darstellung.....	375
Zufallsvorgänge, Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten.....	375
Die klassische Wahrscheinlichkeit.....	375
Kolmogorov-Axiome.....	376
Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten.....	377
Die statistische Wahrscheinlichkeit.....	377
Aufgaben.....	379

Kapitel 24

Zufallsexperimente..... 381

Zufallsexperiment.....	381
Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Schnitts von Ereignissen.....	383
Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Vereinigung von Ereignissen.....	385
Darstellung des Zufallsexperiments im Baumdiagramm.....	385
Laplace-Experimente.....	387

22 Inhaltsverzeichnis

Bernoulli-Experiment.....	388
Mehrstufige Zufallsexperimente	388
Beispiel mehrstufiges Zufallsexperiment.....	389
Berechnung von gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten	389
Baumdiagramme und Vierfeldertafeln.....	390
Baumdiagramme für mehrstufige Zufallsexperimente.....	390
Vierfeldertafeln	391
Aufgaben	392

Kapitel 25

Bedingte Wahrscheinlichkeiten 395

Was bedingte Wahrscheinlichkeiten ausmacht	395
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.....	399
Formel von Bayes.....	400
Anwendung: Test auf eine Krankheit.....	402
Unabhängigkeit von Ereignissen	404
Aufgaben	404

Kapitel 26

Zufallsvariablen 405

Zufallsvariable	406
Verteilung von Zufallsvariablen.....	407
Kumulierte Verteilung einer Zufallsvariable.....	408
Erwartungswert von Zufallsvariablen.....	410
Varianz und Standardabweichung von Zufallsvariablen	411
Bernoulli-Verteilung.....	413
Definition.....	413
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der	
Bernoulli-Verteilung.....	414
Binomialverteilung.....	414
Definition.....	415
Bedeutung der einzelnen Bestandteile.....	415
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der	
Binomialverteilung.....	416
Kumulierte Wahrscheinlichkeiten	416
Wahrscheinlichkeiten berechnen	417
Drei-Mal-Mindestens-Aufgaben	418
Vorgehensweise zur Lösung.....	419
Aufgaben	419

Kapitel 27

Hypothesentests..... 421

Der Alternativtest.....	421
Der einseitige Signifikanztest.....	424
Aufgaben	425

TEIL V	
DER TOP-TEN-TEIL	427
Kapitel 28	
Zehn Tipps für die Prüfungsvorbereitung.....	429
Strukturiert vorbereiten	429
Inhalte erfassen	429
Die Operatoren kennen.....	430
Die Formelsammlung kennen.....	430
Den Taschenrechner kennen.....	430
Die Inhalte aufbereiten	431
Vorsicht: YouTube	431
Rechnen, rechnen, rechnen	431
Gemeinsam vorbereiten	431
Prüfungssimulation(en) durchführen.....	432
Lösungen	433
Kapitel 2.....	433
Kapitel 3.....	434
Kapitel 4.....	435
Kapitel 5.....	436
Kapitel 6.....	438
Kapitel 7.....	439
Kapitel 8.....	439
Kapitel 9.....	440
Kapitel 10.....	442
Kapitel 12.....	452
Kapitel 13.....	455
Kapitel 14.....	460
Kapitel 15.....	467
Kapitel 16.....	469
Kapitel 17.....	475
Kapitel 18.....	476
Kapitel 19.....	482
Kapitel 20.....	483
Kapitel 21.....	486
Kapitel 22.....	488
Kapitel 23.....	490
Kapitel 24.....	491
Kapitel 25.....	493
Kapitel 26.....	495
Kapitel 27.....	498
Abbildungsverzeichnis	501
Stichwortverzeichnis	507