

Inhaltsverzeichnis

1	Sprechweisen, Symbole und Mengen	1
1.1	Sprechweisen und Symbole der Mathematik	1
1.2	Summen- und Produktzeichen	5
1.3	Potenzen und Wurzeln	5
1.4	Symbole der Mengenlehre	6
1.5	Aufgaben	9
2	Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	11
2.1	Die natürlichen Zahlen	11
2.2	Die ganzen Zahlen	16
2.3	Die rationalen Zahlen	16
2.4	Aufgaben	17
3	Die reellen Zahlen	19
3.1	Grundlegendes	19
3.2	Reelle Intervalle	21
3.3	Der Betrag einer reellen Zahl	21
3.4	n -te Wurzeln	23
3.5	Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	23
3.6	Maximum, Minimum, Supremum und Infimum	25
3.7	Aufgaben	27
4	Maschinenzahlen	29
4.1	b -adische Darstellung reeller Zahlen	29
4.2	Gleitpunktzahlen	31
4.3	Aufgaben	36
5	Polynome	37
5.1	Polynome – Multiplikation und Division	37
5.2	Faktorisierung von Polynomen	42
5.3	Auswerten von Polynomen	44

5.4	Partialbruchzerlegung	45
5.5	Aufgaben	48
6	Trigonometrische Funktionen	51
6.1	Sinus und Kosinus	51
6.2	Tangens und Kotangens	55
6.3	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	57
6.4	Aufgaben	61
7	Komplexe Zahlen – Kartesische Koordinaten	65
7.1	Konstruktion von $\mathbb{C}$	65
7.2	Die imaginäre Einheit und weitere Begriffe	67
7.3	Der Fundamentalsatz der Algebra	69
7.4	Aufgaben	71
8	Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten	73
8.1	Die Polardarstellung	73
8.2	Anwendungen der Polardarstellung	76
8.3	Aufgaben	80
9	Lineare Gleichungssysteme	81
9.1	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	81
9.2	Der Rang einer Matrix	86
9.3	Homogene lineare Gleichungssysteme	88
9.4	Aufgaben	90
10	Rechnen mit Matrizen	93
10.1	Definition von Matrizen und einige besondere Matrizen	93
10.2	Rechenoperationen	95
10.3	Invertieren von Matrizen	100
10.4	Rechenregeln	102
10.5	Aufgaben	104
11	LR-Zerlegung einer Matrix	107
11.1	Motivation	107
11.2	Die LR -Zerlegung – vereinfachte Variante	109
11.3	Die LR -Zerlegung – allgemeine Variante	112
11.4	Die LR -Zerlegung – mit Spaltenpivotsuche	114
11.5	Aufgaben	116
12	Die Determinante	119
12.1	Definition der Determinante	119
12.2	Berechnung der Determinante	121
12.3	Anwendungen der Determinante	126
12.4	Aufgaben	128

13	Vektorräume	131
13.1	Definition und wichtige Beispiele	131
13.2	Untervektorräume	134
13.3	Aufgaben	136
14	Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit	139
14.1	Linearkombinationen	139
14.2	Das Erzeugnis von X	142
14.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit	143
14.4	Aufgaben	146
15	Basen von Vektorräumen	149
15.1	Basen	150
15.2	Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungssysteme	154
15.3	Aufgaben	158
16	Orthogonalität I	161
16.1	Skalarprodukte	162
16.2	Länge, Abstand, Winkel und Orthogonalität	164
16.3	Orthonormalbasen	166
16.4	Orthogonale Zerlegung und Linearkombination bezüglich einer ONB.	167
16.5	Orthogonale Matrizen	169
16.6	Aufgaben	172
17	Orthogonalität II	175
17.1	Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt	175
17.2	Das Vektor- und das Spatprodukt	178
17.3	Die orthogonale Projektion	181
17.4	Aufgaben	184
18	Das lineare Ausgleichsproblem	187
18.1	Das lineare Ausgleichsproblem und seine Lösung	187
18.2	Die orthogonale Projektion	188
18.3	Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	190
18.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	191
18.5	Aufgaben	195
19	Die QR-Zerlegung einer Matrix	199
19.1	Volle und reduzierte QR -Zerlegung	199
19.2	Konstruktion der QR -Zerlegung	200
19.3	Anwendungen der QR -Zerlegung	205
19.4	Aufgaben	207

20 Folgen	209
20.1 Begriffe	209
20.2 Konvergenz und Divergenz von Folgen	212
20.3 Aufgaben	215
21 Berechnung von Grenzwerten von Folgen	217
21.1 Grenzwertbestimmung bei einer expliziten Folge	217
21.2 Grenzwertbestimmung bei einer rekursiven Folge	220
21.3 Aufgaben	223
22 Reihen	225
22.1 Definition und Beispiele	225
22.2 Konvergenzkriterien	228
22.3 Aufgaben	232
23 Abbildungen	235
23.1 Begriffe und Beispiele	235
23.2 Verkettung, injektiv, surjektiv, bijektiv	238
23.3 Die Umkehrabbildung	243
23.4 Beschränkte und monotone Funktionen	245
23.5 Aufgaben	246
24 Potenzreihen	249
24.1 Der Konvergenzbereich reeller Potenzreihen	249
24.2 Der Konvergenzbereich komplexer Potenzreihen	254
24.3 Die Exponential- und die Logarithmusfunktion	256
24.4 Die hyperbolischen Funktionen	258
24.5 Aufgaben	260
25 Grenzwerte und Stetigkeit	261
25.1 Grenzwerte von Funktionen	261
25.2 Asymptoten von Funktionen	265
25.3 Stetigkeit	267
25.4 Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen	269
25.5 Das Bisektionsverfahren	270
25.6 Aufgaben	272
26 Differentiation	275
26.1 Die Ableitung und die Ableitungsfunktion	275
26.2 Ableitungsregeln	278
26.3 Numerische Differentiation	282
26.4 Aufgaben	284

27	Anwendungen der Differentialrechnung I	287
27.1	Monotonie	287
27.2	Lokale und globale Extrema	288
27.3	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	291
27.4	Konvexität	295
27.5	Die Regel von L'Hospital	297
27.6	Aufgaben	299
28	Anwendungen der Differentialrechnung II	301
28.1	Das Newtonverfahren	301
28.2	Taylorentwicklung	305
28.3	Restgliedabschätzungen	308
28.4	Bestimmung von Taylorreihen	312
28.5	Aufgaben	315
29	Polynom- und Splineinterpolation	317
29.1	Polynominterpolation	317
29.2	Konstruktion kubischer Splines	321
29.3	Aufgaben	325
30	Integration I	327
30.1	Das bestimmte Integral	327
30.2	Das unbestimmte Integral	331
30.3	Aufgaben	339
31	Integration II	341
31.1	Integration rationaler Funktionen	341
31.2	Rationale Funktionen in Sinus und Kosinus	344
31.3	Numerische Integration	347
31.4	Volumina und Oberflächen von Rotationskörpern	349
31.5	Aufgaben	351
32	Uneigentliche Integrale	353
32.1	Berechnung uneigentlicher Integrale	353
32.2	Das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale	356
32.3	Aufgaben	358
33	Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	359
33.1	Erste Differentialgleichungen	360
33.2	Separierbare Differentialgleichungen	361
33.3	Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	365
33.4	Aufgaben	368

34	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	369
34.1	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	370
34.2	Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	374
34.3	Aufgaben	381
35	Einige besondere Typen von Differentialgleichungen	383
35.1	Die homogene Differentialgleichung	383
35.2	Die Euler'sche Differentialgleichung	385
35.3	Die Bernoulli'sche Differentialgleichung	387
35.4	Die Riccati'sche Differentialgleichung	388
35.5	Der Potenzreihenansatz	390
35.6	Aufgaben	393
36	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I	395
36.1	Erste Verfahren	395
36.2	Runge-Kuttaverfahren	399
36.3	Mehrschrittverfahren	402
36.4	Aufgaben	404
37	Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen	407
37.1	Definitionen und Beispiele	407
37.2	Bild, Kern und die Dimensionsformel	410
37.3	Koordinatenvektoren	411
37.4	Darstellungsmatrizen	413
37.5	Aufgaben	415
38	Basistransformation	419
38.1	Die Darstellungsmatrix der Verkettungen linearer Abbildungen	419
38.2	Basistransformation	421
38.3	Die zwei Methoden zur Bestimmung von Darstellungsmatrizen	422
38.4	Aufgaben	425
39	Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren	429
39.1	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	429
39.2	Diagonalisieren von Matrizen	431
39.3	Das charakteristische Polynom einer Matrix	433
39.4	Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen	438
39.5	Aufgaben	440
40	Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	443
40.1	Gerschgorinkreise	443
40.2	Vektoriteration	445
40.3	Das Jacobiverfahren	447

40.4	Das QR -Verfahren	451
40.5	Aufgaben	453
41	Quadriken	455
41.1	Begriffe und erste Beispiele	456
41.2	Transformation auf Normalform	459
41.3	Aufgaben	463
42	Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung	467
42.1	Die Schurzerlegung	467
42.2	Berechnung der Schurzerlegung	469
42.3	Singulärwertzerlegung	472
42.4	Bestimmung der Singulärwertzerlegung	473
42.5	Aufgaben	476
43	Die Jordannormalform I	479
43.1	Existenz der Jordannormalform	479
43.2	Verallgemeinerte Eigenräume	482
43.3	Aufgaben	487
44	Die Jordannormalform II.	489
44.1	Konstruktion einer Jordanbasis	489
44.2	Anzahl und Größe der Jordankästchen	496
44.3	Aufgaben	497
45	Definitheit und Matrixnormen.	499
45.1	Definitheit von Matrizen	499
45.2	Matrixnormen	503
45.3	Aufgaben	509
46	Funktionen mehrerer Veränderlicher	511
46.1	Die Funktionen und ihre Darstellungen	511
46.2	Einige topologische Begriffe	514
46.3	Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit	517
46.4	Aufgaben	520
47	Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix	521
47.1	Der Gradient.	521
47.2	Die Hessematrix.	526
47.3	Die Jacobimatrix	529
47.4	Aufgaben	532
48	Anwendungen der partiellen Ableitungen	535
48.1	Das (mehrdimensionale) Newtonverfahren	535
48.2	Taylorentwicklung	538
48.3	Aufgaben	544

49	Extremwertbestimmung	547
49.1	Lokale und globale Extrema	547
49.2	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	551
49.3	Aufgaben	556
50	Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen	559
50.1	Extrema unter Nebenbedingungen	559
50.2	Das Einsetzverfahren	561
50.3	Die Lagrange'sche Multiplikatorenregel	564
50.4	Extrema unter mehreren Nebenbedingungen	568
50.5	Aufgaben	570
51	Totale Differentiation, Differentialoperatoren	573
51.1	Totale Differenzierbarkeit	573
51.2	Das totale Differential	575
51.3	Differentialoperatoren	577
51.4	Aufgaben	581
52	Implizite Funktionen	583
52.1	Implizite Funktionen – der einfache Fall	583
52.2	Implizite Funktionen – der allgemeine Fall	588
52.3	Aufgaben	591
53	Koordinatentransformationen	595
53.1	Transformationen und Transformationsmatrizen	595
53.2	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	596
53.3	Die Differentialoperatoren in kartesischen Zylinder- und Kugelkoordinaten	599
53.4	Umrechnung von Vektorfeldern und Skalarfeldern	602
53.5	Aufgaben	605
54	Kurven I	607
54.1	Begriffe	607
54.2	Länge einer Kurve	613
54.3	Aufgaben	617
55	Kurven II	619
55.1	Umparametrisierung einer Kurve	619
55.2	Begleitendes Dreiein, Krümmung und Torsion	621
55.3	Die Leibniz'sche Sektorformel	624
55.4	Aufgaben	626
56	Kurvenintegrale	629
56.1	Skalare und vektorielle Kurvenintegrale	629
56.2	Anwendungen der Kurvenintegrale	634
56.3	Aufgaben	636

57	Gradientenfelder	639
57.1	Definitionen	639
57.2	Existenz einer Stammfunktion	641
57.3	Bestimmung einer Stammfunktion	643
57.4	Aufgaben	645
58	Bereichsintegrale	649
58.1	Integration über Rechtecke bzw. Quader	649
58.2	Normalbereiche	652
58.3	Integration über Normalbereiche	654
58.4	Aufgaben	658
59	Die Transformationsformel	661
59.1	Integration über Polar-, Zylinder-, Kugel- und weitere Koordinaten	661
59.2	Anwendung: Massen- und Schwerpunktbestimmung	666
59.3	Aufgaben	668
60	Flächen und Flächenintegrale	671
60.1	Reguläre Flächen	671
60.2	Flächenintegrale	674
60.3	Übersicht über die behandelten Integrale	677
60.4	Aufgaben	678
61	Integralsätze I	681
61.1	Der ebene Satz von Green	681
61.2	Der ebene Satz von Gauß	685
61.3	Aufgaben	688
62	Integralsätze II	691
62.1	Der Divergenzsatz von Gauß	691
62.2	Der Satz von Stokes	695
62.3	Aufgaben	699
63	Allgemeines zu Differentialgleichungen	703
63.1	Das Richtungsfeld	703
63.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	704
63.3	Transformation auf Systeme 1. Ordnung	707
63.4	Aufgaben	709
64	Die exakte Differentialgleichung	713
64.1	Definition exakter DGLen	713
64.2	Das Lösungsverfahren	714
64.3	Aufgaben	718

65	Lineare Differentialgleichungssysteme I	721
65.1	Die Exponentialfunktion für Matrizen	722
65.2	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	724
65.3	Die Lösung für ein diagonalisierbares A	726
65.4	Aufgaben	729
66	Lineare Differentialgleichungssysteme II	731
66.1	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	731
66.2	Die Lösung für ein nichtdiagonalisierbares A	734
66.3	Aufgaben	736
67	Lineare Differentialgleichungssysteme III	739
67.1	Lösen von DGL-Systemen	739
67.2	Stabilität	743
67.3	Aufgaben	749
68	Randwertprobleme	753
68.1	Typen von Randwertproblemen	753
68.2	Erste Lösungsmethoden	754
68.3	Lineare Randwertprobleme	755
68.4	Die Methode mit der Green'schen Funktion	758
68.5	Aufgaben	763
69	Grundbegriffe der Numerik	765
69.1	Kondition	766
69.2	Die Groß-O-Notation	770
69.3	Stabilität	772
69.4	Aufgaben	773
70	Fixpunktiteration	775
70.1	Die Fixpunktgleichung	775
70.2	Die Konvergenz von Iterationsverfahren	777
70.3	Implementation	782
70.4	Konvergenzgeschwindigkeit	783
70.5	Aufgaben	784
71	Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme	787
71.1	Lösen von Gleichungssystemen durch Fixpunktiteration	787
71.2	Das Jacobiverfahren	789
71.3	Das Gauß-Seidelverfahren	790
71.4	Relaxation	792
71.5	Aufgaben	794

72 Optimierung	797
72.1 Das Optimum	797
72.2 Das Gradientenverfahren	798
72.3 Newtonverfahren	800
72.4 Aufgaben	802
73 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II	805
73.1 Lösungsverfahren für DGL-Systeme	805
73.2 Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren	807
73.3 Steife Differentialgleichungen	811
73.4 Randwertprobleme	814
73.5 Aufgaben	822
74 Fourierreihen – Berechnung der Fourierkoeffizienten	825
74.1 Periodische Funktionen	825
74.2 Die zulässigen Funktionen	828
74.3 Entwicklung in Fourierreihen – reelle Version	829
74.4 Anwendung: Berechnung von Reihenwerten	833
74.5 Entwicklung in Fourierreihen – komplexe Version	834
74.6 Aufgaben	838
75 Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung	841
75.1 Das Orthonormalsystem $1/\sqrt{2}, \cos(kx), \sin(kx)$	841
75.2 Sätze und Regeln	843
75.3 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	848
75.4 Aufgaben	849
76 Fouriertransformation I	853
76.1 Die Fouriertransformation	853
76.2 Die inverse Fouriertransformation	860
76.3 Aufgaben	862
77 Fouriertransformation II	863
77.1 Die Regeln und Sätze zur Fouriertransformation	863
77.2 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	867
77.3 Aufgaben	871
78 Diskrete Fouriertransformation	873
78.1 Näherungsweise Bestimmung der Fourierkoeffizienten	873
78.2 Die inverse diskrete Fouriertransformation	877
78.3 Trigonometrische Interpolation	877
78.4 Aufgaben	882

79	Die Laplacetransformation	885
79.1	Die Laplacetransformation.	885
79.2	Die Rechenregeln bzw. Sätze zur Laplacetransformation	889
79.3	Anwendungen	892
79.4	Aufgaben	899
80	Holomorphe Funktionen	901
80.1	Komplexe Funktionen	901
80.2	Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie	908
80.3	Aufgaben	911
81	Komplexe Integration	913
81.1	Komplexe Kurven	913
81.2	Komplexe Kurvenintegrale	916
81.3	Der Cauchyintegralsatz und die Cauchyintegralformel.	919
81.4	Aufgaben	924
82	Laurentreihen	927
82.1	Singularitäten.	927
82.2	Laurentreihen.	929
82.3	Laurentreihenentwicklung	932
82.4	Aufgaben	934
83	Der Residuenkalkül	935
83.1	Der Residuensatz	935
83.2	Berechnung reeller Integrale	940
83.3	Aufgaben	944
84	Konforme Abbildungen	945
84.1	Allgemeines zu konformen Abbildungen	945
84.2	Möbiustransformationen	947
84.3	Aufgaben	953
85	Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem	955
85.1	Harmonische Funktionen.	955
85.2	Das Dirichlet'sche Randwertproblem	958
85.3	Aufgaben	965
86	Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	967
86.1	Lineare pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	968
86.2	Lineare pDGLen 1. Ordnung	971
86.3	Die quasilineare pDGL erster Ordnung	973
86.4	Das Charakteristikenverfahren.	975
86.5	Aufgaben	978

87	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines	981
87.1	Erste Begriffe	982
87.2	Die Typeneinteilung	984
87.3	Lösungsmethoden	985
87.4	Aufgaben	988
88	Die Laplace- bzw. Poissongleichung	991
88.1	Randwertprobleme für die Poissongleichung	991
88.2	Lösungen der Laplacegleichung	992
88.3	Das Dirichlet'sche Randwertproblem für einen Kreis	994
88.4	Numerische Lösung	995
88.5	Aufgaben	999
89	Die Wärmeleitungsgleichung	1003
89.1	Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung	1003
89.2	Lösungen der Gleichung	1004
89.3	Nullrandbedingung: Lösung mit Fourierreihen	1006
89.4	Numerische Lösung	1008
89.5	Aufgaben	1011
90	Die Wellengleichung	1013
90.1	Anfangs-Randwertprobleme für die Wellengleichung	1013
90.2	Lösungen der Gleichung	1014
90.3	Die schwingende Saite: Lösung mit Fourierreihen	1016
90.4	Numerische Lösung	1018
90.5	Aufgaben	1021
91	Lösen von pDGLen mit Fourier- und Laplacetransformation	1025
91.1	Ein einführendes Beispiel	1025
91.2	Das allgemeine Vorgehen	1027
91.3	Aufgaben	1031
	Stichwortverzeichnis	1033