

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Natürliche Zahlen und vollständige Induktion</b>         | <b>1</b>  |
| 1.1      | Vollständige Induktion .....                                | 1         |
| 1.2      | Fakultät und Binomialkoeffizienten .....                    | 2         |
| 1.3      | Aufgaben.....                                               | 5         |
| <b>2</b> | <b>Reelle Zahlen</b>                                        | <b>7</b>  |
| 2.1      | Die Körperstruktur von $\mathbb{R}$ .....                   | 7         |
| 2.2      | Die Anordnung von $\mathbb{R}$ .....                        | 8         |
| 2.3      | Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....                  | 10        |
| 2.4      | $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar .....                      | 16        |
| 2.5      | Aufgaben.....                                               | 18        |
| <b>3</b> | <b>Komplexe Zahlen</b>                                      | <b>20</b> |
| 3.1      | Der Körper der komplexen Zahlen .....                       | 20        |
| 3.2      | Die komplexe Zahlenebene .....                              | 22        |
| 3.3      | Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$ .....              | 24        |
| 3.4      | Die Unmöglichkeit einer Anordnung von $\mathbb{C}$ .....    | 26        |
| 3.5      | Aufgaben.....                                               | 26        |
| <b>4</b> | <b>Funktionen</b>                                           | <b>28</b> |
| 4.1      | Grundbegriffe .....                                         | 28        |
| 4.2      | Polynome .....                                              | 32        |
| 4.3      | Rationale Funktionen .....                                  | 35        |
| 4.4      | Aufgaben.....                                               | 39        |
| <b>5</b> | <b>Folgen</b>                                               | <b>41</b> |
| 5.1      | Konvergenz von Folgen.....                                  | 41        |
| 5.2      | Rechenregeln .....                                          | 43        |
| 5.3      | Monotone Folgen .....                                       | 46        |
| 5.4      | Eine Rekursionsfolge zur Berechnung von Quadratwurzeln .... | 48        |

|          |                                                                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.5      | Der Satz von Bolzano-Weierstraß .....                                                                  | 50         |
| 5.6      | Das Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy.<br>Nochmals die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....     | 52         |
| 5.7      | Uneigentliche Konvergenz .....                                                                         | 54         |
| 5.8      | Aufgaben .....                                                                                         | 56         |
| <b>6</b> | <b>Reihen</b>                                                                                          | <b>59</b>  |
| 6.1      | Konvergenz von Reihen .....                                                                            | 59         |
| 6.2      | Konvergenzkriterien .....                                                                              | 61         |
| 6.3      | Summierbare Familien .....                                                                             | 66         |
| 6.4      | Potenzreihen .....                                                                                     | 74         |
| 6.5      | Aufgaben .....                                                                                         | 77         |
| <b>7</b> | <b>Stetige Funktionen. Grenzwerte</b>                                                                  | <b>80</b>  |
| 7.1      | Stetigkeit .....                                                                                       | 80         |
| 7.2      | Rechnen mit stetigen Funktionen .....                                                                  | 83         |
| 7.3      | Erzeugung stetiger Funktionen durch normal konvergente<br>Reihen .....                                 | 84         |
| 7.4      | Stetige reelle Funktionen auf Intervallen.<br>Der Zwischenwertsatz .....                               | 86         |
| 7.5      | Stetige Funktionen auf kompakten Mengen.<br>Der Satz vom Maximum und Minimum .....                     | 88         |
| 7.6      | Anwendung: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra .....                                              | 92         |
| 7.7      | Stetige Fortsetzung. Grenzwerte von Funktionen .....                                                   | 93         |
| 7.8      | Einseitige Grenzwerte. Uneigentliche Grenzwerte .....                                                  | 97         |
| 7.9      | Aufgaben .....                                                                                         | 100        |
| <b>8</b> | <b>Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen<br/>Funktionen</b>                                | <b>103</b> |
| 8.1      | Definition der Exponentialfunktion .....                                                               | 103        |
| 8.2      | Die Exponentialfunktion für reelle Argumente .....                                                     | 107        |
| 8.3      | Der natürliche Logarithmus .....                                                                       | 110        |
| 8.4      | Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen.<br>Allgemeine Potenzen .....                               | 112        |
| 8.5      | Binomialreihen und Logarithmusreihe .....                                                              | 114        |
| 8.6      | Definition der trigonometrischen Funktionen .....                                                      | 117        |
| 8.7      | Nullstellen und Periodizität .....                                                                     | 119        |
| 8.8      | Die Arcus-Funktionen .....                                                                             | 122        |
| 8.9      | Polarkoordinaten komplexer Zahlen .....                                                                | 123        |
| 8.10     | Geometrie der Exponentialabbildung. Hauptzweig des<br>komplexen Logarithmus und des Arcustangens ..... | 125        |

|           |                                                                                                   |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.11      | Die Zahl $\pi$ .....                                                                              | 129        |
| 8.12      | Die hyperbolischen Funktionen .....                                                               | 131        |
| 8.13      | Aufgaben .....                                                                                    | 133        |
| <b>9</b>  | <b>Differentialrechnung</b> .....                                                                 | <b>137</b> |
| 9.1       | Die Ableitung einer Funktion .....                                                                | 137        |
| 9.2       | Ableitungsregeln .....                                                                            | 141        |
| 9.3       | Mittelwertsatz und Schrankensatz .....                                                            | 144        |
| 9.4       | Beispiele und Anwendungen .....                                                                   | 147        |
| 9.5       | Reihen differenzierbarer Funktionen .....                                                         | 152        |
| 9.6       | Ableitungen höherer Ordnung .....                                                                 | 154        |
| 9.7       | Konvexität .....                                                                                  | 157        |
| 9.8       | Konvexe Funktionen und Ungleichungen .....                                                        | 160        |
| 9.9       | Fast überall differenzierbare Funktionen.<br>Verallgemeinerter Schrankensatz .....                | 163        |
| 9.10      | Der Begriff der Stammfunktion .....                                                               | 166        |
| 9.11      | Eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige, nirgends differenzierbare Funktion ...                        | 168        |
| 9.12      | Aufgaben .....                                                                                    | 169        |
| <b>10</b> | <b>Lineare Differentialgleichungen</b> .....                                                      | <b>173</b> |
| 10.1      | Eindeutigkeitssatz und Dimensionsabschätzung .....                                                | 173        |
| 10.2      | Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung .....                                            | 176        |
| 10.3      | Partikuläre Lösungen bei speziellen Inhomogenitäten .....                                         | 180        |
| 10.4      | Anwendung auf Schwingungsprobleme .....                                                           | 182        |
| 10.5      | Partikuläre Lösungen bei allgemeinen Inhomogenitäten .....                                        | 185        |
| 10.6      | Erweiterung des Lösungsbegriffes .....                                                            | 187        |
| 10.7      | Aufgaben .....                                                                                    | 189        |
| <b>11</b> | <b>Integralrechnung</b> .....                                                                     | <b>191</b> |
| 11.1      | Treppenfunktionen und ihre Integration .....                                                      | 191        |
| 11.2      | Regelfunktionen .....                                                                             | 193        |
| 11.3      | Integration der Regelfunktionen über kompakte Intervalle ....                                     | 196        |
| 11.4      | Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.<br>Stammfunktionen zu Regelfunktionen ..... | 199        |
| 11.5      | Erste Anwendungen .....                                                                           | 206        |
| 11.6      | Integration elementarer Funktionen .....                                                          | 208        |
| 11.7      | Integration normal konvergenter Reihen .....                                                      | 214        |
| 11.8      | Riemannsche Summen .....                                                                          | 216        |
| 11.9      | Integration über nicht kompakte Intervalle .....                                                  | 218        |
| 11.10     | Die Eulersche Summationsformel .....                                                              | 223        |
| 11.11     | Aufgaben .....                                                                                    | 229        |

|           |                                                                                  |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>12</b> | <b>Geometrie differenzierbarer Kurven</b>                                        | <b>233</b> |
| 12.1      | Parametrisierte Kurven. Grundbegriffe .....                                      | 233        |
| 12.2      | Die Bogenlänge .....                                                             | 238        |
| 12.3      | Parameterwechsel .....                                                           | 242        |
| 12.4      | Krümmung ebener Kurven .....                                                     | 243        |
| 12.5      | Die Sektorfläche ebener Kurven .....                                             | 246        |
| 12.6      | Kurven in Polarkoordinaten .....                                                 | 249        |
| 12.7      | Umfang und Windungszahlen .....                                                  | 252        |
| 12.8      | Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra .....                          | 255        |
| 12.9      | Geometrie der Planetenbewegung.<br>Die drei Keplerschen Gesetze .....            | 256        |
| 12.10     | Aufgaben .....                                                                   | 258        |
| <b>13</b> | <b>Elementar integrierbare Differentialgleichungen</b>                           | <b>262</b> |
| 13.1      | Wachstumsmodelle. Lineare und Bernoullische Gleichungen ...                      | 262        |
| 13.2      | Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen .....                      | 266        |
| 13.3      | Nicht-lineare Schwingungen.<br>Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x)$ ..... | 273        |
| 13.4      | Aufgaben .....                                                                   | 279        |
| <b>14</b> | <b>Lokale Approximation von Funktionen.<br/>Taylorpolynome und Taylorreihen</b>  | <b>282</b> |
| 14.1      | Approximation durch Taylorpolynome .....                                         | 282        |
| 14.2      | Taylorreihen. Rechnen mit Potenzreihen .....                                     | 286        |
| 14.3      | Bernoulli-Zahlen und Cotangensreihe.<br>Bernoulli-Polynome .....                 | 289        |
| 14.4      | Das Newton-Verfahren .....                                                       | 292        |
| 14.5      | Aufgaben .....                                                                   | 298        |
| <b>15</b> | <b>Globale Approximation von Funktionen.<br/>Gleichmäßige Konvergenz</b>         | <b>300</b> |
| 15.1      | Gleichmäßige Konvergenz .....                                                    | 300        |
| 15.2      | Vertauschungssätze .....                                                         | 303        |
| 15.3      | Kriterien für gleichmäßige Konvergenz .....                                      | 305        |
| 15.4      | Anwendung: die Eulerschen Formeln für $\zeta(2n)$ .....                          | 309        |
| 15.5      | Approximation durch Faltung mit Dirac-Folgen .....                               | 310        |
| 15.6      | Lokal gleichmäßige Konvergenz.<br>Der Überdeckungssatz von Heine-Borel .....     | 314        |
| 15.7      | Der Approximationssatz von Stone .....                                           | 316        |
| 15.8      | Aufgaben .....                                                                   | 319        |

|           |                                                                                                            |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>16</b> | <b>Approximation periodischer Funktionen. Fourierreihen</b>                                                | <b>321</b> |
| 16.1      | Der Approximationssatz von Fejér .....                                                                     | 321        |
| 16.2      | Definition der Fourierreihen. Erste Beispiele und Anwendungen                                              | 325        |
| 16.3      | Punktweise Konvergenz nach Dirichlet .....                                                                 | 329        |
| 16.4      | Ein Beispiel von Fejér .....                                                                               | 332        |
| 16.5      | Die Besselsche Approximation periodischer Funktionen .....                                                 | 334        |
| 16.6      | Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer<br>Funktionen .....                                      | 336        |
| 16.7      | Konvergenz im quadratischen Mittel.<br>Die Parsevalsche Gleichung .....                                    | 339        |
| 16.8      | Anwendung: das isoperimetrische Problem .....                                                              | 342        |
| 16.9      | Wärmeleitung in einem Ring. Die Thetafunktion .....                                                        | 343        |
| 16.10     | Die Poissonsche Summenformel .....                                                                         | 347        |
| 16.11     | Aufgaben .....                                                                                             | 349        |
| <b>17</b> | <b>Die Gammafunktion</b>                                                                                   | <b>351</b> |
| 17.1      | Die Gammafunktion nach Gauß .....                                                                          | 351        |
| 17.2      | Der Eindeutigkeitssatz der Gammafunktion von Bohr und<br>Møllerup. Die Eulersche Integraldarstellung ..... | 355        |
| 17.3      | Die Stirlingsche Formel .....                                                                              | 357        |
| 17.4      | Aufgaben .....                                                                                             | 360        |
|           | <b>Biographische Notiz zu Euler</b>                                                                        | <b>361</b> |
|           | <b>Lösungen zu den Aufgaben</b>                                                                            | <b>362</b> |
|           | <b>Literatur</b>                                                                                           | <b>403</b> |
|           | <b>Bezeichnungen</b>                                                                                       | <b>404</b> |
|           | <b>Namen- und Sachverzeichnis</b>                                                                          | <b>406</b> |