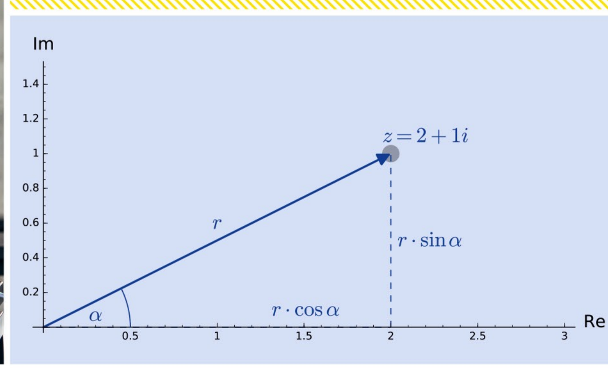
Fit fürs Studium

Mathematik

+++ Uwe Post +++

Für alle MINT-Fächer



+++ Grundkonzepte verstehen und Wissenslücken schließen. Ideal zum Selbststudium. Mit vielen Beispielen, Aufgaben und ausführlichen Lösungen +++

Rheinwerk Computing

Kapitel 2

Gesetze der Algebra

Zahlen sind zum Rechnen da, bis auf jene, die auf Nummernschilder gedruckt werden. Wobei das auch nur für Autos gilt – mit Nummern von Lokomotiven kann man tatsächlich Berechnungen anstellen. Zunächst aber zu wichtigeren Themen …

Wo stehe ich?

2.1 Testen Sie sich selbst

Viele Rechengesetze wenden Sie alltäglich intuitiv an. Wenn Sie lieber $4 + 1$ statt $1 + 4$ rechnen, dann wenden Sie das *Kommutativgesetz* an. Es erlaubt Ihnen, beim Addieren oder Multiplizieren die Summanden bzw. Faktoren zu vertauschen. Das spart eine Menge Zeit beim Kopfrechnen, wenn man es geschickt anstellt. Aber sind Sie sicher, dass Sie alle Rechenregeln parat haben? Die folgenden Testaufgaben werden Ihnen helfen, das herauszufinden.

1. Berechnen Sie die folgenden Summen jeweils innerhalb von höchstens fünf Sekunden im Kopf.
   a) $2 + 4 + 7 + 6 + 8 + 3 =$
   b) $11 + 3 + 9 + 17 =$
   c) $2 + 19 + (-2) + 31 =$
   d) $13 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 5 =$
2. Berechnen Sie die folgenden Terme jeweils innerhalb von höchstens zehn Sekunden im Kopf.
   a) $17 \cdot 3 + 7 \cdot (9 + 8) =$
   b) $(Ct + l) \cdot hu =$
   c) $1{,}5a + 0{,}5a - 2a =$
3. Vereinfachen bzw. berechnen Sie.
   a) $a^2 \cdot a^4 \cdot a^{-6} =$
   b) $(-1)^3 + t^4 \cdot t^{-2} \cdot t^3 : t^5 =$
   c) $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{x^5}{x^2} \cdot \sqrt{x} =$
4. Berechnen Sie.
   a) Sie sind stolzer Besitzer von 360 Lichtschwertern. 20 % davon haben rote Klingen.
   b) Zwecks Erweiterung Ihrer Lichtschwertersammlung haben Sie einen Kredit aufgenommen: 800 Credits zu 1,25 % Zinsen pro Jahr. Wie viel müssen Sie nach drei Monaten zurückzahlen, um sich den Kredit komplett vom Hals zu schaffen?
5. Berechnen Sie.
   a) $\frac{23}{4} + \frac{34}{8} =$

b) $\dfrac{x \cdot \left(0{,}25 + 1\frac{3}{4}\right)}{2} =$

c) $0{,}1 \cdot \left(2\frac{1}{3} + 7{,}\bar{6}\right) =$

d) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} =$

e) $2^{-4{,}5-\frac{3}{2}} =$

f) $\sqrt[5]{9} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{27}}\right)^{-1} =$

2.2 Gesetze, die jeder kennt

Drei Gesetze der Algebra verwenden Sie intuitiv, sei es beim »vorteilhaften Rechnen« oder beim schriftlichen Dividieren. Nichtsdestotrotz hilft es, sich diese Regeln noch mal in Erinnerung zu rufen.

Damit setzen wir den Rundgang durch die Schulmathematik auf entspannte Weise fort …

Vertauschen (fast) nach Belieben

Viele mathematische Operationen erlauben es, ihre Argumente zu vertauschen. Dazu gehören die Addition und die Multiplikation, nicht aber Subtraktion, Division und Potenzierung. Die beiden ersteren heißen demnach kommutative binäre Verknüpfungen, denn es gilt:

$a + b \;=\; b + a$

$a \cdot b \;=\; b \cdot a$

(*Kommutativgesetz*)

Es gibt noch andere kommutative Operationen, aber die sollen uns im Moment nicht interessieren. Entscheidend ist, dass dieses einfache Gesetz der Algebra es zusammen mit seinen Kollegen (Assoziativgesetz und Distributivgesetz) häufig erlaubt, Rechenaufgaben zu vereinfachen. Auch wenn Sie diese Gesetze sicher längst kennen und richtig anwenden können, werfe ich sie einmal in den Raum:

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(*Assoziativgesetz*)

Beispiel: Vorteilhaft vertauschen

Um mehrere Summanden möglichst schnell addieren zu können, halten Sie Ausschau nach solchen, die zusammen einen glatten Zehner ergeben. Vertauschen Sie im Kopf die Summanden, und verwenden Sie das Assoziativgesetz, um sie zuerst aufzuaddieren. Das funktioniert prima bei den Aufgaben aus dem Selbsttest:

$2 + 4 + 7 + 6 + 8 + 3$
$= 2 + 8 + 4 + 6 + 7 + 3$
$= 10 + 10 + 10 = 30$

Derselbe Trick funktioniert bei der nächsten Aufgabe:

$11 + 3 + 9 + 17 = 11 + 9 + 3 + 17 = 20 + 20 = 40$

Auch wenn eine negative Zahl beteiligt ist, dürfen Sie Summanden vertauschen. Da das Addieren einer negativen Zahl dasselbe ist wie deren Subtraktion, vereinfacht sich die dritte Aufgabe enorm:

$2 + 19 + (-2) + 31 = 2 - 2 + 19 + 31 = 50$

Dem Gehirn fällt es viel leichter, sich »glatte« Zahlen zu merken und damit zu rechnen, in diesem Fall die 10. Sie addieren also zunächst solche Zahlen, deren Einer-Stellen sich auf 10 addieren (oder zu null subtrahieren). Dann wird der Rest leichter.

Die beiden Gesetze gelten auch für die Multiplikation. Das sehen Sie an der letzten Teilaufgabe aus dem Selbsttest:

$13 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 5 = 13 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 5 = 16{,}9$

Bei den Dezimalkommazahlen müssen Sie nur darauf achten, wo das Komma hingehört. $2 \cdot 5$ ist 10, folglich ist $0{,}2 \cdot 5$ gleich 1. Dass $13 \cdot 13 = 169$ ist, wissen Sie optimalerweise auswendig. Das Komma richtig setzen, und schon haben Sie die Lösung.

Das Verteilungsgesetz

Sobald beide Grundrechenarten beteiligt sind, gilt die alte Regel »Punktrechnung vor Strichrechnung«. Um diese außer Kraft zu setzen, gibt es Klammern. Die wollen Sie oft loswerden, und dafür benutzen Sie das folgende Gesetz:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(*Distributivgesetz*)

Das Distributivgesetz kennen Sie vielleicht unter den Begriffen *Ausklammern* bzw. *Ausmultiplizieren* – damit ist genau dasselbe gemeint. Es funktioniert (dank Assoziativgesetz) übrigens auch mit mehr als zwei Summanden. Deshalb lassen sich unhandliche Summen mit Unbekannten intuitiv *zusammenfassen*:

Beispiel: Zusammenfassen

$$3a + 6x + 7z - 4x + 7a + 5x + 3z$$
$$= (3 + 7)a + (6 - 4 + 5)x + (7 + 3)z$$
$$= 10a + 7x + 10z$$

Zwischen Zahlen und Unbekannten sparen Mathematiker den Multiplizieren-Punkt normalerweise ein.

Sicher verwenden Sie das Distributivgesetz automatisch, beispielsweise wenn Sie eine zweistellige Zahl mit einer einstelligen multiplizieren:

$$47 \cdot 7 = (40 + 7) \cdot 7 = 40 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 280 + 49 = 329$$

Beim schriftlichen Multiplizieren oder Dividieren verwenden Sie ebenfalls automatisch (und mehrmals) dieses Gesetz.

Beispiel: Vereinfachen

Oft ergeben sich dadurch drastische Vereinfachungen. Wie in den Selbsttest-Aufgaben:

$$17 \cdot 3 + 7 \cdot (9 + 8) =$$

$$17 \cdot 3 + 7 \cdot 17 =$$

$$17 \cdot (3 + 7) =$$

$$17 \cdot 10 = 170$$

Auch wenn Sie mit Unbekannten rechnen – und das werden Sie in diesem Buch noch ziemlich oft tun –, ist das Distributivgesetz oft sehr hilfreich:

$$(Ct + l) \cdot hu =$$
$$Cthu + lhu$$

Mit dieser Lösung können Sie das gleichnamige Ungeheuer aus den Werken von H. P. Lovecraft zum Glück nicht zum Leben erwecken.

$$1{,}5a + 0{,}5a - 2a =$$
$$(1{,}5 + 0{,}5 - 2) \cdot a =$$
$$0 \cdot a = 0$$

Ein weiteres Thema, hinter dem letztlich das Distributivgesetz steckt, zeige ich Ihnen im nächsten Abschnitt.

Zig Prozent auf alles!

Auch bei der *Prozentrechnung* verwenden Sie meist das Distributivgesetz. Angenommen, Ihr Nachwuchs verlangt 10 % mehr Taschengeld. 10 % bedeutet wörtlich »10 von 100«, mathematisch ausgedrückt $\frac{10}{100}$, also $\frac{1}{10}$ oder 0,1. Bezogen aufs aktuelle Taschengeld t_{jetzt} also $t_{\text{Erhöhung}} = 0{,}1 \cdot\ t_{\text{jetzt}}$

Um das neue Taschengeld zu ermitteln, rechnen Sie $t_{\text{neu}} = t_{\text{jetzt}} + 0{,}1 \cdot t_{\text{jetzt}}$. In dieser einfachen Gleichung können Sie das jetzige Taschengeld ausklammern und kommen auf:

$$t_{\text{neu}} = (1 + 0{,}1) \cdot t_{\text{jetzt}} = 1{,}1 \cdot t_{\text{jetzt}}$$

Eine Erhöhung eines Wertes um einen gewissen Prozentsatz p % bedeutet also allgemein eine Multiplikation mit $1 + \frac{p}{100}$.

Beispiel: Prozentrechnung

In den Selbsttest-Übungen gab es auch zwei Aufgaben zur Prozentrechnung. Bei der ersten fehlte die Frage – nicht aus Versehen, denn es ist nicht ungewöhnlich, dass Sie bei einem Problem zunächst einmal die sich stellende Frage korrekt formulieren müssen. Im Fall Ihrer 360 Lichtschwerter umfassenden Sammlung lautet sie natürlich: Wie viele davon haben rot leuchtende Klingen?

Achten Sie darauf, sich bei Sachaufgaben immer die gegebenen und die gesuchten Größen bewusst zu machen (und am besten hinzuschreiben):

Gegeben sind die Gesamtanzahl der Lichtschwerter $l = 360$ sowie der Prozentsatz $p\,\% = 20\,\%$.

Gesucht ist die Anzahl der roten Lichtschwerter l_{rot}.

Sie rechnen also:

$$l_{\text{rot}} = l \cdot p\,\% = 360 \cdot 20\,\% = 360 \cdot 0{,}2 = \ldots$$

Oh Mist, kein Taschenrechnersymbol? Ja, genau, Kopfrechnen ist gesund! Das Doppelte von 360 ist 720, und 0,2 ist ein Zehntel des Doppelten, also ist das Ergebnis 72, und das ist die Anzahl Ihrer roten Lichtschwerter.

Zinsen bitte!

Ein Spezialfall der Prozentrechnung ist die *Zinsrechnung*. Zinsen – also was Sie der Bank zahlen, damit sie Ihnen was leiht, oder umgekehrt – hängen immer vom Gesamtbetrag ab. Der Zinssatz ist ein Prozentsatz, wird aber üblicherweise pro Jahr (p. a., per annum) angegeben. In der zugehörigen Selbsttest-Aufgabe gab es einen kleinen Trick. Ist er Ihnen aufgefallen?

Beispiel: Zinsrechnung

Die angegebenen Zinsen von 1,25 % auf die Kreditsumme von 800 € gelten für ein Jahr, Sie zahlen den Kredit aber schon nach drei Monaten zurück! Folglich müssen Sie nur für ein Vierteljahr Zinsen zahlen, also den vierten Teil:

$z = 800 \cdot 1{,}25\,\%: 4$

Um die Rechnerei zu vereinfachen, können Sie für das Prozentzeichen ein Hundertstel einsetzen – oder durch 100 teilen – und alles ein bisschen vertauschen.

$$\begin{aligned}&= 800 : 100 \cdot 1{,}25 : 4\\&= 8 : 4 \cdot 1{,}25\\&= 2 \cdot 1{,}25\\&= 2{,}5\end{aligned}$$

Zweieinhalb Credits Zinsen – na, das war ja gar nicht so teuer!

Falls Sie ein Fach studieren, in dem Geld ein großes Thema ist, werden Sie noch deutlich kompliziertere Begriffe aus der Zinsrechnung aufgetischt bekommen. Für die Zwecke dieses Buches lassen wir es mit der sehr einfachen Betrachtung bewenden.

Die Minusklammer

Das Distributivgesetz steckt außerdem hinter der gefürchteten *Minusklammer*. Schauen Sie sich den folgenden Term an:

$a - (b + c - d)$

Wie werden Sie diese Klammer los?

Sicher erinnern Sie sich noch an die Minusklammer-Regel: *Entfernt man die Klammern, drehen sich die Vorzeichen um*. Aber warum eigentlich?

Der obige Beispiel-Term lässt sich auch wie folgt als Summe schreiben:

$a + (-1) \cdot (b + c - d)$

Hinter der Minusklammer versteckt sich also eine Punktrechnung! Um das Produkt auszurechnen, verwenden Sie das Distributivgesetz und multiplizieren jeden Summanden in der Klammer mit der –1. Sie erhalten:

$a - b - c + d$

Sie sehen, dass sich im Vergleich zum Ausgangsterm die Vorzeichen innerhalb der Klammer umgedreht haben.

Binomische Formeln

In manchen Fällen müssen Sie das Distributivgesetz zweimal anwenden, nämlich wenn Sie *zwei* Summenklammern *ausmultiplizieren* müssen.

Beispiel: Ausmultiplizieren

$(14 + x) \cdot (y + 1)$

Hier ist die vordere Klammer der Faktor, mit dem nach dem Distributivgesetz die beiden Summanden der zweiten Klammer einzeln zu multiplizieren sind. Schauen Sie sich den ersten Schritt an:

$(14 + x) \cdot (y + 1) = (14 + x) \cdot y + (14 + x) \cdot 1$

Im zweiten Schritt multiplizieren Sie das vordere Produkt aus, der Faktor 1 im hinteren fällt weg, und Sie erhalten:

$14 \cdot y \;+\; x \cdot y \;+\; 14 \;+\; x$

Ein häufiger Spezialfall ist jener mit identischen Klammerinhalten:

$(a + b) \cdot (a + b)$

Multiplizieren Sie das mal im Kopf aus! Sie erhalten:

$a \cdot a \;+\; a \cdot b \;+\; b \cdot a \;+\; b \cdot b$

Das lässt sich natürlich viel einfacher ausdrücken:

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Das kommt Ihnen bekannt vor? Genau, Sie haben soeben die *erste binomische Formel* hergeleitet. Sie ist nichts anderes als ein Spezialfall des zweimal angewendeten Distributivgesetzes.

Es gibt noch zwei weitere binomische Formeln, deren Herleitung ich Ihnen in Form einer Entspannungsübung überlasse (am Ende des Abschnitts).

Es lohnt sich, die binomischen Formeln auswendig zu kennen, weil ihre Anwendung Zeit spart. Nur ein paar Sekunden vielleicht – aber das ziemlich oft.

Allerdings ist es keineswegs erforderlich oder gar sinnvoll, sich bei jeder Kleinigkeit zu vergegenwärtigen, wie das Gesetz heißt, das man gerade anwendet, wenn man es einmal begriffen hat. Hauptsache ist: Sie können die Grundgesetze der Algebra auf jede beliebige Situation anwenden.

Und davon kommen noch so einige auf uns zu ...

2.3 Brüche, gemischt und dezimal

Hand aufs Herz: Die Brüche in den Testaufgaben zu Beginn des Abschnitts haben Sie ein klein wenig aus dem Tritt gebracht. Es kann sein, dass Sie ohne Probleme eine ganzrationale Funktion ableiten können (auch wenn das erst in Kapitel 15 wichtig wird), solange kein Bruch als Zahlenfaktor darin auftaucht. Keine Sorge: Bruchrechnung kann man verstehen, üben und beherrschen.

Gemeine Brüche

Ein *gemeiner Bruch* (ja, die heißen wirklich so) ist nichts anderes als eine Divisionsaufgabe, also *ein Quotient, dessen Ergebnis man gerade nicht ausrechnen möchte*.

Geschrieben wird der Bruch mit einem meist waagerechten Strich, über dem der Zähler (*Divident*) steht. Der Nenner (*Divisor*) steht darunter. Gelegentlich verwendet man einen Schrägstrich, so zum Beispiel beim Prozentzeichen %, das für den Faktor 1/100 alias $\frac{1}{100}$ steht.

Da Divisionen durch 0 nicht möglich sind, gibt es eine kleine Einschränkung: Der Nenner darf nicht 0 sein.

Allgemein ist ein Bruch also nichts anderes als:

$$\frac{z}{n} = z/n = z:n$$

Üblicherweise schreibt man einen Bruch so, dass Zähler und Nenner natürliche Zahlen sind. Sollte Zähler oder Nenner negativ sein, setzt man das Minuszeichen normalerweise vor den Bruchstrich. Sind Zähler und Nenner negativ, lässt sich der Bruch durch –1 kürzen und ist letztlich positiv.

Kürzen und erweitern

Einen Bruch zu *kürzen*, bedeutet hierbei, Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler zu teilen, solange dabei erneut natürliche Zahlen herauskommen.

Beispiel: Einen Bruch kürzen

Als Beispiel dient uns der folgende Bruch:

$$\frac{36}{8}$$

Überlegen Sie zunächst, welche gemeinsamen Teiler Zähler und Nenner haben, durch welche natürlichen Zahlen sie also ohne Rest teilbar sind:

$$T(36) = \{1, 2, 4, 9, 18, 36\}$$

Diese Schreibweise meint die Menge der Teiler der in Klammern stehenden Zahl.

$$T(8) = \{1, 2, 4, 8\}$$

Das sind die beiden *Teilermengen* , also die Mengen der möglichen Teiler. Bilden Sie die Schnittmenge der beiden Mengen (welche Zahlen kommen in beiden Mengen vor?):

$$T(36) \cap T(8) = \{1 ,2, 4\}$$

Die größte Zahl in dieser Menge ist der *größte gemeinsame Teiler* (*ggT*) von 8 und 36, nämlich 4.

Teilen Sie Zähler und Nenner des Bruchs durch 4, erhalten Sie:

$$\frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Sie können den ursprünglichen Zähler und den Nenner jeweils als Produkt von 4 und der resultierenden Zahl schreiben. Auch wenn Sie diesen Schritt meist im Kopf ausführen, erleichtert er das »Wegkürzen«: Dabei verschwinden solche Faktoren, die sowohl im Zähler als auch im Nenner auftreten.

$$\frac{36}{8} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{9}{2}$$

Warum eigentlich?

Schreiben Sie die Aufgabe mal als Division:

$$36 : 8 = (9 \cdot 4) : (2 \cdot 4)$$

Die vordere Klammer dürfen Sie weglassen, die hintere nur dann, wenn Sie statt mit 4 multiplizieren durch 4 teilen. Das ist dasselbe Prinzip wie bei der Minusklammer, nur angewendet auf die Punktrechnung.

$= 9 \cdot 4 : 2 : 4$

Jetzt dürfen Sie umsortieren:

$= 9 : 2 \cdot 4 : 4$

Wenn Sie nach dem Assoziativgesetz die beiden Vieren zuerst durcheinander teilen, bleibt 9:2 stehen.

In Buchstaben ausgedrückt:

$$\frac{z}{n} = z : n = (y \cdot f) : (m \cdot f) = (y : m) \cdot (f : f) = y : m = \frac{y}{m}$$

Ist der Nenner eines Bruchs nach dem Kürzen 1, kann er weggelassen werden, da die 1 das *neutrale Element der Division* ist: Teilen durch 1 macht rein gar nichts mit dem Ausgangswert.

Da Brüche nichts anderes sind als spezielle Darstellungen von bestimmten rationalen Zahlen, benötigen Sie keine anderen Rechenregeln als jene, die Sie ohnehin aus der Arithmetik kennen. Allerdings ersparen Ihnen Brüche oft das Hantieren mit wenig übersichtlichen Kommazahlen. Es ist einfach praktischer, $\frac{1}{7}$ zu schreiben statt $0,\overline{142857}$, insbesondere in Zwischenschritten von längeren Berechnungen. Die Dezimalkommazahl beherrschen die meisten Taschenrechner dafür besser. Falls Sie keinen haben oder zum Benutzen allein Ihres Gehirns gezwungen werden, verwenden Sie einfache *Bruchregeln*.

Rechnen mit Brüchen

Addieren von Brüchen geschieht sozusagen mittels Distributivgesetz unter der Motorhaube. Dazu zwei Aufgaben aus den Selbsttests.

Beispiel: Brüche addieren

$$\frac{23}{4} + \frac{34}{8}$$

Zunächst *erweitern* Sie die Brüche so, dass sie den gleichen Nenner haben, und zwar das *kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)*. (Ja, den rechten Bruch könnte man kürzen, aber lassen Sie uns das in diesem Beispiel einmal »übersehen«.)

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 8 ist 8. Falls Sie das bei komplizierteren Aufgaben nicht auf Anhieb sehen, stellen Sie sich die Vielfachen-Mengen vor, bilden Sie die Schnittmenge, und greifen Sie zur kleinsten Zahl:

$V(4) = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$

$V(8) = \{8, 16, 24, \ldots\}$

$V(4) \cap V(8) = \{8, 16, 24, \ldots\}$

Die Schreibweise der Vielfachen-Mengen $V()$ ähnelt jener der Teilermengen $T()$, sie enthält aber immer unendlich viele Elemente.

Erweitern ist das Gegenteil von kürzen, Sie multiplizieren also Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor.

$$\frac{46}{8} + \frac{34}{8}$$

Jetzt klammern Sie den Nenner aus:

$$\frac{1}{8} \cdot (46 + 34) = \frac{1}{8} \cdot 80$$

Denn als Teilaufgabe sähe das so aus:

$46 : 8 + 34 : 8 = (46 + 34) : 8 = 80 : 8$

Sie sehen sofort, was herauskommt. Ich möchte aber noch mal kurz die Bruchschreibweise wiederholen und Ihnen zeigen, wie man zwei Brüche multipliziert: *Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner*. Eine Zahl hat dabei immer den Nenner 1. Also:

$$\frac{1}{8} \cdot 80 = \frac{1}{8} \cdot \frac{80}{1} = \frac{1 \cdot 80}{8 \cdot 1} = \frac{80}{8} = (\text{kürzen})\, \frac{10}{1} = 10$$

Ich breite das nicht ohne Grund so ausführlich aus. Bei der Bruchrechnung passieren erfahrungsgemäß viele Fehler. Das muss nicht sein, wenn man genug Routine im Umgang damit hat.

Subtraktion von Brüchen funktioniert genau wie die Addition, also mit einem gemeinsamen Nenner.

Es bleibt die Division übrig: *Man teilt durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert*. Den *Kehrwert* eines Bruchs bilden Sie, indem Sie Zähler und Nenner vertauschen. Es gilt also:

$$\frac{a}{b} : \frac{s}{t} = \frac{a}{b} \cdot \frac{t}{s} = \frac{a \cdot t}{b \cdot s}$$

Natürlich kann das Geteilt-Zeichen der Division zweier Brüche wiederum als Bruchstrich geschrieben werden:

$$\frac{a}{b} : \frac{s}{t} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{s}{t}}$$

Dieses unhandliche Gebilde schimpft sich *Doppelbruch*, und falls Ihnen einer in die Finger kommt, formen Sie ihn am besten sofort in einen normalen Bruch um!

Beispiel: Doppelbruch

In den Selbsttest-Aufgaben gab es dieses Ungetüm:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$$

Statt den oberen durch den unteren Bruch zu teilen, können Sie mit dem Kehrwert multiplizieren:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

Gemischte Brüche

Für Irritation sorgen oft *gemischte Brüche*. Das liegt daran, dass dort ein Rechenzeichen aus reiner Faulheit unterschlagen wird.

$$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

Dabei genießt eigentlich der Mal-Punkt das Privileg, als einziges Rechenzeichen verschlampt werden zu dürfen. Denn der folgende Term ist *kein* gemischter Bruch, sondern ein Produkt:

$$a\frac{b}{c}$$

Trotzdem tauchen gemischte Brüche in der freien Wildbahn auf, und Sie müssen sie richtig erkennen. Folgender Dialog passiert Ihnen auf dem Wochenmarkt vermutlich nie im Leben: »Anderthalb Pfund Äpfel bitte!« – »Das heißt 0,75 Kilogramm, Sie Mathemuffel!«

Sie rechnen gemischte und allgemeine Brüche ineinander um, indem Sie sie als Summe schreiben und auf einen Bruchstrich bringen.

Gemischte Brüche werden gerne als einfachstmögliche Darstellung eines Bruchs betrachtet, der größer ist als 1, d. h. der Zähler ist größer als der Nenner. Wenn die Aufgabenstellung nicht explizit einen gemischten Bruch als Lösung verlangt, genügt in meinen Augen völlig der allgemeine Bruch, denn letztlich meint er exakt dieselbe rationale Zahl.

Dezimalkommazahlen

Nicht kürzbare Brüche stellen keine ganzen Zahlen dar, sind also $\notin \mathbb{Z}$.

Das bedeutet, dass die dahintersteckende Zahl eine *Dezimalkommazahl* ist. Sie wissen: In unserem üblichen, auf der Zahl 10 basierenden *Dezimalsystem* meint die erste Stelle vor dem Komma die Einer, die zweite die Zehner und so weiter. Zahlensysteme, die nicht auf 10 basieren, betrachten wir später.

Hinter dem Komma folgen Zehntel, Hundertstel und so weiter, also Vielfache von $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ usw. Mit diesem Hintergrundwissen können Sie jeden Bruch leicht in eine Dezimalkommazahl umrechnen, ohne den Taschenrechner zu bemühen.

Beispiel: Rechnen mit Dezimalkommazahlen

Jetzt können Sie sich noch mal zwei Teilaufgaben aus dem Selbsttest anschauen:

$$\frac{x \cdot \left(0{,}25 + 1\frac{3}{4}\right)}{2} =$$

Wandeln Sie die Dezimalkommazahl 0,25 in einen Bruch um: $0{,}25 = \frac{25}{100}$

Gekürzt ist das $\frac{1}{4}$.

Den gemischten Bruch wandeln Sie in einen gemeinen um: $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Zufälligerweise haben beide Brüche den gleichen Nenner. Addiert ergeben sie $\frac{8}{4} = 2$. Diese 2 kürzt sich praktischerweise gegen jene im Nenner des Doppelbruchs weg, und es bleibt ein einsames x übrig:

$$\frac{x \cdot \left(0{,}25 + 1\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{x \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{x \cdot 2}{2} = x$$

Die nächste Aufgabe rechnen Sie fast genauso:

$$0{,}1 \cdot \left(2\frac{1}{3} + 7{,}\overline{6}\right) =$$

Allerdings ergibt es hier wenig Sinn, die Dezimalkommazahl mit 100 zu multiplizieren. Vielmehr sollten Sie wissen, dass eine *Periode* – also eine sich unendlich wiederholende Folge von Nachkommastellen – beim Teilen durch natürliche Zahlen auftritt, die sich nicht durch die Primfaktoren 2 und 5 darstellen lässt. Sprich: Dividieren durch Zahlen wie 3, 7, 11 (oder Vielfache davon) erzeugen Perioden. So ist $1 : 3 = 0{,}\overline{3}$ und demzufolge $2 : 3 = 0{,}\overline{6}$ das Doppelte davon. Mit etwas Übung können Sie die meisten Dezimalkommazahlen mit Perioden recht leicht als gemischte Brüche erkennen. Unsere $7{,}\overline{6}$ ist nichts anderes als $7\frac{2}{3}$.

Damit ist die Aufgabe nicht mehr schwer:

$$0{,}1 \cdot \left(2\frac{1}{3} + 7{,}\overline{6}\right) = 0{,}1 \cdot \left(2\frac{1}{3} + 7\frac{2}{3}\right) = 0{,}1 \cdot 10 = 1$$

Um Dezimalkommazahlen zu »erkennen« oder um Brüche in solche umzurechnen, dividieren Sie schriftlich, fragen Sie Taschenrechner (oder App), oder lernen Sie die wichtigsten auswendig. Dafür gibt es einen verdammt guten Grund: In zahlreichen Presseartikeln werden Statistiken zitiert, und Journalisten neigen dazu, etwas »Abwechslung« in ihre verbale Wiedergabe von rein numerischen Aussagen zu bringen. Etwa so:

Ungefähr jeder zweite Mensch ist ein Mann, aber nur 8 % der Weltbevölkerung spricht Mandarin, wobei ein Viertel aller Japaner über 64 Jahre alt sind.

Selbst wenn die Zahlen auch nur annähernd miteinander vergleichbar wären: Wir finden in diesem (erfundenen, aber durchaus repräsentativen) Zitat drei verschiedene Darstellungsformeln für Zahlen zwischen 0 und 1.

»Jeder zweite« ist eine Umschreibung, die 0,5 bedeutet, 8 % meint 0,08, und »ein Viertel« – also $\frac{1}{4}$ – ist 0,25. Solche Umschreibungen erschweren es, Zahlen zu vergleichen, und oft sind sie sogar suggestiv. Denn was klingt nach mehr: »Jeder achte« oder »12,5 %«?

Merken Sie sich am besten ein paar wichtige Bruchdarstellungen von Dezimalkommazahlen, um im Zweifelsfall sofort die richtige Vorstellung von einem angegebenen Wert zu haben:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$

In der Praxis (also bei Sachaufgaben) dürfen Sie meist auf zwei Nachkommastellen runden, auch und gerade Perioden, mathematisch exakt richtig ist aber nur die Lösung mit Periodenstrich.

2.4 Potenzen und Wurzeln

Lassen Sie uns über *Potenzen* sprechen! Zunächst einmal bedeutet eine Potenz nur wiederholtes Multiplizieren der gleichen Zahl mit sich selbst. Diese Zahl heißt bei einer Potenz *Basis*, die Anzahl der Wiederholungen *Exponent*. Für eine Basis x schreibt man:

$$\underbrace{x \cdot x \cdots x \cdot x}_{n} = x^n$$

Das gilt zunächst einmal für natürliche Exponenten n.

Die Potenzgesetze

Wenn Sie sich die obige Definition vor Augen halten, ergeben sich sofort einfache Rechenregeln, die *Potenzgesetze*. Für das Produkt zweier Potenzen gleicher Basis gilt beispielsweise:

$$x^a \cdot x^b = \underbrace{x \cdots x}_{a} \cdot \underbrace{x \cdots x}_{b} = \underbrace{x \cdots x}_{a+b} = x^{a+b}$$

Bei einer Division subtrahieren Sie die Exponenten:

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

Mathematiker kamen auf die großartige Idee, auch negative ganze Zahlen als Exponenten zuzulassen und dies als Division zu betrachten, also der zur Multiplikation inversen Operation. Das heißt:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Das spielt wunderbar mit den Potenzgesetzen zusammen, schauen Sie:

$$a^{-3} = a^{(-1 \cdot 3)} = (a^3)^{(-1)} = \frac{1}{a^3}$$

Und weiter:

$$a^5 \cdot a^{-2} = \frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{(5-2)}$$

Sie müssen sich also keine zusätzlichen Regeln merken, denn negative Exponenten funktionieren genauso wie positive. Bloß darf die Basis natürlich nicht 0 sein, da Teilen durch 0 unmöglich ist.

Für die Potenz eines Produktes gilt:

$$(x \cdot y)^a = \underbrace{x \cdot y \cdots x \cdot y}_{a} = \underbrace{x \cdots x}_{a} \cdot \underbrace{y \cdots y}_{a} = x^a \cdot y^a$$

So ist jede Potenz der Basis 0 ebenfalls 0, denn es ist egal, wie oft man 0 mit sich selbst multipliziert – es wird nichts anderes als 0 dabei herauskommen. Eine Ausnahme bildet der Spezialfall 0^0, dessen Wert nicht definiert ist. Hingegen ist für jede andere Basis die nullte Potenz als 1 definiert:

$$x^0 = 1 (\text{für } x \neq 0)$$

Jede Potenz mit geradem Exponenten ist positiv, auch wenn die Basis negativ ist. Minus mal minus ergibt plus, also:

$$a \text{ gerade} \Rightarrow x^a \geq 0$$

Wegen der Basis 0, deren Quadrat wiederum 0 ist, muss hier ein »größer oder gleich« stehen.

Einen Bruch potenzieren Sie, indem Sie Zähler und Nenner einzeln potenzieren:

$$\left(\frac{z}{n}\right)^a = \frac{z^a}{n^a}$$

Beim Potenzieren von Potenzen können Sie die Reihenfolge vertauschen:

$$(x^a)^b = x^{(a \cdot b)} = \left(x^b\right)^a$$

Beispiele: Rechnen mit Potenzen

In den Selbsttests gab es ein paar Aufgaben, die Sie mit diesem Wissen lösen können:

$$a^2 \cdot a^4 \cdot a^{-6}$$

$$= a^{2+4-6} = a^0 = 1$$

Vorsicht, die nächste Aufgabe enthält nicht nur ein Produkt, sondern auch eine Summe:

$$(-1)^3 + t^4 \cdot t^{-2} \cdot t^3 : t^5$$

Die dritte Potenz von –1 ist $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$. Also ergibt sich:

$$(-1) + t^{4-2+3-5} = -1 + t^0 = -1 + 1 = 0$$

Umkehren von Potenzen

Weiter oben hatte ich ja schon darauf hingewiesen, dass Potenzen mit geraden Exponenten immer größer oder gleich null sind.

Umgekehrt folgt, dass kein Quadrat kleiner als null ist, weswegen eine Gleichung der Form $x^2 = -1$ in der Grundmenge der reellen Zahlen keine Lösung besitzt.

Aber: Eine Gleichung der Form $x^2 = a$ besitzt *zwei* Lösungen, nämlich x und $-x$ (falls $a = 0$ ist, natürlich nur eine). Wenn Sie eine Potenz mit geradem Exponenten bilden, geht sozusagen eine Information verloren: Anhand des Ergebnisses ist es unmöglich zu ermitteln, ob der Ausgangswert positiv oder negativ war.

Bei ungeraden Exponenten sieht die Sache anders aus. Während es für eine positive Basis keinen Grund gibt, derart potenziert negativ zu werden, sind ungerade Potenzen negativer Zahlen selbst negativ. Das ergibt sich nicht nur durch die Anschauung, sondern auch, wenn Sie einen ungeraden Exponenten um 1 erhöhen und damit »begradigen«:

$$a \text{ ungerade und } x < 0 \Rightarrow x^a = x^{(a-1+1)} = \underbrace{x^{(a-1)}}_{>0, \text{ da } a-1 \text{ gerade}} \cdot \underbrace{x}_{<0} < 0$$

Wurzeln und gebrochene Exponenten

Auch rationale Zahlen dürfen Exponenten sein. Wenn Sie den Exponenten als Bruch schreiben, meint der Nenner eine Wurzel:

$$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}$$

Der *Radikant* – die Zahl unter dem Wurzelzeichen – ist dann eine Potenz mit Basis a.

Ist der Zähler eine 1 und der Nenner eine 2, handelt es sich um die Quadratwurzel:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Sie dürfen Wurzel und Potenz vertauschen. Auch in solchen Fällen funktionieren die Potenzgesetze. Bei einem Produkt von Potenzen mit gebrochenen Exponenten addieren Sie die einfach.

Etwa so:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = a^1 = a$$

Das Wurzelzeichen meint immer die *nicht negative reelle* Lösung der umgekehrten Gleichung. Deshalb gilt:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Die Wurzel aus einem Quadrat ist der *Betrag*! Probieren Sie es mit einer negativen Zahl aus:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Das Ergebnis ist also nicht die anfangs quadrierte Zahl, sondern deren Betrag. Potenzen mit geraden Exponenten »verbergen« das negative Vorzeichen, und der Wurzel bleibt nichts anderes übrig, als ein eindeutiges und positives Ergebnis zu liefern – also den Absolutwert der ursprünglichen Zahl.

Beispiele: Wurzeln und Potenzen mit rationalen Exponenten

Jetzt können Sie auch die letzten Aufgaben aus den Selbsttests bewältigen:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \frac{x^5}{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}+5-2+\frac{1}{2}} = x^{3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{23}{6}} = \sqrt[6]{x^{23}}$$

Auch Dezimalkommazahlen im Exponenten dürften Sie jetzt nicht mehr erschrecken:

$$2^{-4,5-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{12}{2}} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

Selbst kompliziert aussehende Wurzeln verlieren jetzt ihren Nimbus der Unbesiegbaren:

$$\sqrt[5]{9} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{27}}\right)^{-1} = 9^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

Da $9 = 3^2$ ist und $27 = 3^3$, also $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, können Sie dies weiter vereinfachen:

$$= 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = 3^1 = 3$$

2.5 Entspannungsübungen

Aufgabe 1: Berechnen Sie im Kopf

a) $(16:2 + 4:2) =$

b) $33 + 59 - 22 + 7 + 1 + 136 + 12 + (-26) =$

c) $6 \cdot 23 - (8-2) \cdot 10 + 27 \cdot 6 =$

Aufgabe 2: Dringende Reparatur

Das war knapp! Um ein Haar wurde Ihr Raumschiff von kosmischen Piraten geplündert. Klarer Fall: Der Antrieb braucht mehr Leistung, und zwar mindestens 5,35 %. Um die Rechnung der Werkstatt für den fälligen Umbau zu bezahlen, nehmen Sie einen Wucherkredit in Höhe von 2 000 imperialen Credits zu 12 % Zinsen pro Jahr auf. Statt ihn wie geplant schon nach einem Monat zurückzuzahlen, werden Sie von Piraten erwischt und kommen erst nach vier Monaten und einer Lösegeldzahlung in Höhe von 500 Credits frei. Wie viel hat Sie der »Spaß« gekostet?

Aufgabe 3: Leiten Sie die 2. und 3. binomische Formel her

a) 2. binomische Formel: $(a-b)^2 = ?$

b) 3. binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = ?$

Aufgabe 4: Berechnen Sie

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\frac{2}{5} =$

b) $\left(0{,}375 - 2\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} =$

c) $\left(2{,}1 - 16 + \frac{39}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) =$

d) $\left(12{,}6 \cdot \frac{10}{3} - 14\right) : 0,\overline{6} =$

Aufgabe 5: Berechnen oder vereinfachen Sie

a) $(-3)^4 = ?$

b) $(((a^2)^2)^2)^2 = ?$

c) $\sqrt{\dfrac{g^7 \cdot g^{-2}}{g^3}} = ?$

d) $\sqrt[3]{2^3 + 20 + (-1)^3} = ?$

e) $\sqrt[5]{8} \cdot 2^{\frac{2}{5}}$

2.6 Lösungen

Aufgabe 1

a) $(16 : 2 + 4 : 2) = (16 + 4) : 2 = 20 : 2 = 10$

b) $33 + 59 - 22 + 7 + 1 + 136 + 12 + (-26)$
$= (33 + 7) + (59 + 1) + (136 - 26) + (12 - 22)$
$= 40 + 60 + 110 - 10 = 200$

c) $6 \cdot 23 - (8 - 2) \cdot 10 + 27 \cdot 6$
$= 6 \cdot 23 - 6 \cdot 10 + 27 \cdot 6$
$= 6 \cdot (23 + 27 - 10) = 6 \cdot 40 = 240$

Aufgabe 2

Gegeben: Zinssatz $z = 12\ \%$, Kreditsumme $K = 2000$, Lösegeld $L = 500$. Der ebenfalls gegebene Faktor der Leistungserhöhung ist ein Ablenkungsmanöver und für die Aufgabe irrelevant.

Gesucht: Gesamtkosten G

Ansatz: Die Zinsen nach vier Monaten sind $\frac{4}{12}$ $\left(= \frac{1}{3}\right)$ der jährlichen Zinsen. Die Lösegeldzahlung ist zu addieren. Also:

$$G = L + K \cdot z \cdot \frac{1}{3} = 500 + 2000 \cdot 12\ \% \cdot \frac{1}{3}$$
$$= 500 + 2000 \cdot \frac{4}{100}$$
$$= 500 + 80 = 580$$

Die Gesamtkosten sind also 580 imperiale Credits. Die Kreditsumme ist natürlich auch zurückzuzahlen, zählt aber nicht zu den »Kosten«.

Aufgabe 3

a) 2. binomische Formel:

$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) 3. binomische Formel:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Aufgabe 4

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\frac{2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 7 \cdot 6}{30} = \frac{77}{30} = 2\frac{17}{30}$

b) $\left(0{,}375 - 2\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{8} - \frac{17}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{14}{8} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}$

c) $\left(2{,}1 - 16 + \frac{39}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{21}{10} - \frac{160}{10} + \frac{39}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$
$= \frac{-100}{10} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$

d) $\left(12{,}6 \cdot \frac{10}{3} - 14\right) : 0,\bar{6} = \left(\frac{126}{10} \cdot \frac{10}{3} - 14\right) : \frac{2}{3} = (42 - 14) \cdot \frac{3}{2}$
$= 28 \cdot \frac{3}{2} = 14 \cdot 3 = 42$

Aufgabe 5

a) $(-3)^4 = 9^2 = 81$

b) $(((a^2)^2)^2)^2 = a^{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = a^{2^4} = a^{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{g^7 \cdot g^{-2}}{g^3}} = \sqrt{g^{7-2-3}} = \sqrt{g^4} = g^2$

d) $\sqrt[3]{2^3 + 20 + (-1)^3} = \sqrt[3]{8 + 20 - 1} = \sqrt[3]{27} = 3$

e) $\sqrt[5]{8} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^3} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2^{\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$

Kapitel 3

(Un-)gleichungen

Die ganze Welt ist voller mathematischer Gleichungen! Die verbleibende Akkulaufzeit Ihres Handys ist gleich der jetzigen Ladung geteilt durch den Verbrauch pro Zeit. Der Bestand einer Bibliothek ist gleich der Summe der ausgestellten Medien plus der entliehenen Medien. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei Augen zu würfeln, ist gleich dem Quadrat der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel ein Auge zu würfeln. Fehlen nur noch die Lösungen … und der Weg dorthin.

Wo stehe ich?

3.1 Testen Sie sich selbst

Ihre Aufgabe ist es stets, die Lösungsmenge einer Gleichung zu finden. Das ist die Menge all jener Elemente, die erstens zur Grundmenge gehören und zweitens, eingesetzt in die Gleichung, diese zu einer wahren Aussage machen. Dazu müssen Sie meistens die Gleichung durch *Äquivalenzumformungen* verändern, um die Lösung(en) ablesen zu können. Äquivalenzumformungen sind identische Operationen auf beiden Seiten des Gleich-Zeichens, die die Lösungsmenge nicht verändern. Sonst wären sie nicht erlaubt.

Es gibt aber nicht nur einfache Gleichungen, sondern auch *Un*gleichungen und Gleichungs*systeme* und nicht zuletzt Sachaufgaben, zu denen Sie die passende(n) Gleichung(en) zunächst einmal aufstellen müssen. Dieser Abschnitt ist für all diese Fälle zuständig.

1. Bestimmen Sie die Lösung(en). Die Grundmenge ist jeweils die Menge der reellen Zahlen.
   a) $19 - 4x = -9$
   b) $0{,}9x = 8{,}1$
   c) $4(y - 3) - 2y \neq 5(3y + 1)$
   d) $7\frac{3}{4} - u > 1\frac{1}{2}$
   e) $(x + 2)(x + 5) - (x + 1)(x + 6) - 8 = 0$
   f) $(x + 5)(x - 5) + (x - 2)^2 = (x + 5)^2 + 5$
   g) $\frac{2}{x + 1} = \frac{x + 7}{3}$
2. Geben Sie die Lösungsmenge für das folgende Gleichungssystem an.
   $2x + 4 = 2y + 1;\ y - 2 = 2x + 6$
3. Eines der beliebten Zahlenrätsel lautet: Die gesuchte Zahl ist zweistellig und hat die Quersumme 15. Wenn man die beiden Ziffern der Zahl umdreht, ist das Ergebnis um 9 größer.
4. Ein PKW verbraucht auf der 40 km langen Strecke von Dortmund nach Gelsenkirchen-Schalke 1,5 l Diesel. Wie hoch ist der Verbrauch pro 100 km?

3.2 Einfache Gleichungen und Ungleichungen

Jede Gleichung ist eine *Aussageform*, die durch Einsetzen von Werten aus der Lösungsmenge zu einer wahren Aussage wird (und für alle anderen Werte zu einer falschen).

Halten Sie sich vor Augen: Den Wahrheitsgehalt einer mathematischen *Aussage* können Sie immer sofort angeben. Zum Beispiel:

$734 > -6$

Hingegen enthält eine *Aussageform* Unbekannte. Erst durch Einsetzen von Werten wird aus einer Aussageform eine Aussage, und erst dann können Sie den Wahrheitsgehalt bestimmen.

$42x > 0$

Diese Aussageform wird wahr, wenn Sie für x passende (also positive) Zahlen einsetzen, sonst falsch.

Ich gebe Ihnen ein weiteres Beispiel, weil ich darüber mal eine Diskussion mit meinem Mathematik-Professor hatte:

»Es regnet.«

Können Sie wirklich eindeutig entscheiden, ob diese Aussage wahr oder falsch ist?

Dies ist tatsächlich eine Aussage*form*. Denn ihr Wahrheitsgehalt hängt davon ab, an welchem Ort und zu welcher Zeit sie betrachtet wird. Letztlich handelt es sich um eine Gleichung mit mehreren Unbekannten. Falls Sie in einer stecken gebliebenen U-Bahn weilen, können Sie selbst bei genauer Kenntnis von Ort und Zeit nicht mit Sicherheit sagen, ob es an der Oberfläche regnet.

Eine Besonderheit sind *allgemeingültige Aussageformen*. Das sind Aussageformen, die zu wahren Aussagen werden, egal welche konkreten Werte Sie einsetzen. Aber das macht sie nicht zu *Aussagen*. Ein Beispiel:

$x^2 + 1 > 0$

Jedes reelle x hat ein Quadrat, das größer oder gleich 0 ist, folglich ist das Ergebnis immer echt größer 0, wenn Sie auch noch eins addieren.

Gleichungen umformen

Nun ist nicht jeder Aussageform auf Anhieb anzusehen, welche Werte zu einer richtigen Aussage führen. Werfen Sie einen Blick auf das folgende Beispiel:

$8x + 3 = 5x + 24$

Um jene Werte direkt ablesen zu können, die dieser Gleichung genügen, formen Sie sie schrittweise um, bis die Unbekannte allein auf einer Seite steht und auf der anderen ein konkreter Wert. Das ist erlaubt, solange die Umformungen den Wahrheitsgehalt der Aussageform nicht ändern. Solche Umformungen nennt man äquivalent und kennzeichnet sie mit dem Zeichen ⇔. Es gibt auch Umformungen, die nur in eine Richtung den Wahrheitsgehalt nicht ändern, dann verwenden Sie einen einfachen Pfeil statt des doppelten.

Verboten ist es übrigens, auf beiden Seiten mit 0 zu multiplizieren. Dies würde die Lösungsmenge verändern (sie wird identisch mit der Grundmenge), das bringt also gar nichts.

Äquivalente Umformungen sind solche, die auf beiden Seiten des Gleich-Zeichens dieselbe Operation ausführen. Mit geschickt gewählten Umformungen gelingt es dann, die Unbekannte zu isolieren. Die einzelnen Schritte sind für lineare Gleichungen:

1. Klammern ausmultiplizieren, sodass links und rechts Summen stehen
2. Terme mit der Unbekannten zusammenfassen
3. Summanden mit der Unbekannten auf die linke Seite bringen
4. restliche Summanden auf die rechte Seite bringen
5. durch den Vorfaktor der Unbekannten dividieren

Beispiel

Lassen Sie uns die erste Aufgabe aus dem Selbsttest lösen. Schreiben Sie sich jede Äquivalenzumformung hinter einen vertikalen Strich ans Ende der Zeile:

$19 - 4x = -9 \quad | -19$

$-4x = -28 \quad | : (-4)$

$x = 7$

Falls eine Aufgabe nicht explizit nach der Lösungsmenge fragt, sind Sie an dieser Stelle fertig, ansonsten prüfen Sie, ob das ermittelte Ergebnis in der Grundmenge ist, und falls ja, geben Sie an:

$L = \{7\}$

Die zweite Teilaufgabe habe ich Ihnen gestellt, um sicherzugehen, dass Sie mit Dezimalkommazahlen umgehen können. Wenn ja, ist Ihnen die Lösung leichtgefallen:

$0{,}9x = 8{,}1 \quad | : 0{,}9$

$x = 9$

Wenn Sie noch nicht richtig in Übung sind, sollten Sie nach jeder Umformung einmal nachrechnen, denn jeder noch so kleine Fehler wie ein vergessenes Minuszeichen verändert die Lösung. Sie können Ihr ermitteltes Ergebnis am Schluss in die Ursprungsgleichung einsetzen und so die Probe machen.

Ungleichungen lösen

Ungleichungen formen Sie auf die gleiche Weise um wie Gleichungen, bloß ist die Lösungsmenge stets die Grundmenge ohne die für die Unbekannte gefundenen Werte. Die Ungleichheit ist die Negation der Ungleichheit.

Beispiel

Hier die Lösung der Ungleichung aus Aufgabe 1c). Im ersten Schritt lösen Sie alle Klammern auf, indem Sie das Distributivgesetz anwenden:

$$4(y-3)-2y \neq 5(3y+1)$$

$$4y-12-2y \neq 15y+5$$

Das muss natürlich unabhängig davon geschehen, ob eine Ungleichung oder eine Gleichung vorliegt. Um am Ende die Unbekannte – hier y – allein auf einer Seite stehen zu haben, müssen Sie sich durch alle beteiligten Rechenoperationen arbeiten, wie durch die Schalen einer Zwiebel. Die äußerste, ziemlich trockene Schicht ist dabei das Beseitigen der Klammern.

Als Nächstes (immer noch recht trocken) fassen Sie die Terme zusammen, die aus Vielfachen mit y bestehen. Damit wenden Sie erneut das Distributivgesetz an, weil Sie y ausklammern. Danach folgt die erste Umformung, die dazu dient, Terme mit und ohne y auf unterschiedlichen Seiten des Ungleichzeichens zu gruppieren.

$$2y-12 \neq 15y+5 \quad |-2y-5$$

$$-17 \neq 13y$$

In diesem Fall habe ich zwei Minus-Umformungen in einem Schritt durchgeführt. Sie können natürlich stattdessen zwei Schritte machen.

Zuletzt teilen Sie durch den Vorfaktor der Unbekannten:

$$-17 \neq 13y \quad |:13$$

$$-\frac{17}{13} \neq y$$

Da in Zähler und Nenner Primzahlen stehen, kann man diesen Bruch nicht kürzen.

Damit ist die Lösungsmenge:

$$L = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{17}{13}\right\}$$

Bei Ungleichungen müssen Sie auf das Zeichen < oder > aufpassen. Bei beidseitiger Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl dreht sich das Zeichen um, genau wie beim Potenzieren mit –1 (»eins durch ... nehmen«, Kehrwert bilden)!

Beispiel

Lösung Aufgabe 1d):

$$7\frac{3}{4}-u > 1\frac{1}{2} \quad |-7\frac{3}{4}$$

$$-u > 1\frac{1}{2}-7\frac{3}{4}$$

Um die beiden gemischten Brüche voneinander zu subtrahieren, müssen Sie sie auf den gemeinsamen Nenner bringen, in diesem Fall 4, und aus den gemischten Brüchen gemeine machen. Notieren Sie das ruhig als Nebenrechnung:

$$1\frac{1}{2}-7\frac{3}{4} = 1\frac{2}{4}-7\frac{3}{4} = \frac{6}{4}-\frac{31}{4} = -\frac{25}{4}$$

Zum Schluss multiplizieren Sie mit –1 und drehen dabei das Größer-Zeichen um:

$$-u > -\frac{25}{4} \quad |\cdot(-1)$$

$$u < \frac{25}{4}$$

Die Lösungsmenge geben Sie an, indem Sie die gefundene Bedingung für die Unbekannte als Einschlusskriterium schreiben:

$$L = \left\{u \in \mathbb{R}, u < \frac{25}{4}\right\}$$

3.3 Quadratische Gleichungen und Bruchgleichungen

Die bisher gezeigten linearen Gleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass keine Potenzen der Unbekannten vorkommen. Das ändert sich jetzt.

Die Wurzel ziehen

Schauen Sie sich das folgende Beispiel einer *quadratischen Gleichung* an:

$x^2 + 1 = 50$

Zwar können Sie sofort auf beiden Seiten 1 subtrahieren, aber im nächsten Schritt ist Vorsicht geboten. Sie dürfen nicht einfach auf beiden Seiten die Wurzel ziehen! Denn die Gleichung

$x^2 = 49$

hat *zwei* Lösungen! Nämlich die $\sqrt{49}$ und ihre Gegenzahl $-\sqrt{49}$, deren Quadrat ebenfalls 49 ist, also:

$x = 7 \lor x = -7$

In der optionalen Lösungsmengen-Schreibweise:

$L = \{7, -7\}$

Quadratische Ergänzung

Sobald das Quadrat der Unbekannten in einer Summe mit der Unbekannten selbst auftritt, kann die Sache knifflig werden. Nehmen wir uns die folgende Gleichung vor:

$x^2 + 4x = -4$

Leider lassen sich die beiden Terme mit x^2 bzw. x nicht zusammenfassen. Sie können auch nicht einfach beidseitig die Wurzel ziehen (schon gar nicht aus der negativen Zahl –4). Allerdings lässt sich jede quadratische Gleichung dieser Art mit einer binomischen Formel lösen. Zwar steht auf der linken Seite keine solche, aber das lässt sich ändern! Dazu nehmen Sie die *quadratische Ergänzung* vor. Das ist genau jener Summand, der aus dem Term links eine binomische Formel macht. Halten Sie sich dazu die erste binomische Formel mit den Variablen x und a vor Augen:

$x^2 + 2xa + a^2 = (x + a)^2$

In unserem Beispiel muss a offensichtlich 2 sein, da in der Gleichung vor dem x eine 4 steht. Damit ist $a^2 = 2^2$, also auch 4. Addieren Sie diese 4 auf beiden Seiten, steht links eine aufgelöste binomische Formel:

$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 = -4 + 4$

Zufälligerweise steht rechts eine 0, aber entscheidend ist zunächst, dass Sie links die binomische Formel anwenden und somit schreiben können:

$(x + 2)^2 = 0$

Jetzt können Sie die Wurzel ziehen und finden:

$x = -2$

Nicht vergessen: Stünde rechts keine 0, gäbe es zwei Lösungen!

Auf diese Weise lässt sich jede quadratische Gleichung lösen (wenn Sie denn eine Lösung hat).

Alle quadratischen Gleichungen lassen sich übrigens in die gleiche Form bringen:

$x^2 + px + q = 0$

Diese Gleichung lässt sich allgemein lösen. Man erhält:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Das ist die berühmte *pq-Formel*. Wenn Sie möchten, können Sie sie sich merken. Ich persönlich finde es einfacher, sich die zuvor gezeigte Methode mit der quadratischen Ergänzung zu merken, aber das dürfte Geschmacksache sein.

Beispiel: Quadratische Gleichung lösen

Manchmal sind quadratische Gleichungen nicht auf den ersten Blick als solche erkennbar. Nehmen Sie sich Aufgabe 1e) aus den Selbsttests vor:

$(x + 2)(x + 5) - (x + 1)(x + 6) - 8 = 0$

Multiplizieren Sie die Klammern aus:

$x^2 + 7x + 10 - (x^2 + 7x + 6) - 8 = 0$

Wenn Sie die Minusklammer auflösen und die Terme zusammenfassen, stellen Sie fest, dass das x^2 wegfällt. Puh! Doch keine quadratische Gleichung. Dummerweise heben sich auch die beiden Terme mit x gegenseitig auf. Es bleibt stehen:

$-4 = 0$

Das ist eine falsche Aussage, folglich gibt es kein x, das die Gleichung erfüllt, und die Lösungsmenge ist leer.

Beispiel: Quadratische Gleichung lösen (jetzt aber wirklich)

Aufgabe 1f) sieht wie folgt aus:

$(x + 5)(x - 5) + (x - 2)^2 = (x + 5)^2 + 5$

Rechnen Sie zunächst die Klammern aus:

$x^2 - 25 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 10x + 25 + 5$

Gemerkt? Das waren alle drei binomischen Formeln in einer einzigen Gleichung. Okay, fassen Sie auf beiden Seiten die Terme zusammen nach solchen mit x^2, mit x und ohne x. Dann bringen Sie alle Terme mit x oder x^2 auf eine Seite und den Rest auf die andere.

$2x^2 - 4x - 21 = x^2 + 10x + 30 \quad | - x^2 - 10x + 21$

$x^2 - 14x = 51$

Jetzt müssen Sie die linke Seite als unvollständige binomische Formel betrachten. Wegen des negativen Vorzeichens vor dem x-Faktor ist es die zweite.

Die quadratische Ergänzung ist das Quadrat der Hälfte des Faktors vor dem x, also 49. Diese Zahl addieren Sie auf beiden Seiten und erhalten:

$x^2 - 14x + 49 = 51 + 49$

$(x - 7)^2 = 100$

Das sieht doch schon recht übersichtlich aus. Ziehen Sie auf beiden Seiten die Wurzel!

$x - 7 = 10 \lor x - 7 = -10$

Addieren Sie 7, und Sie erhalten die beiden Lösungen.

$x = 17 \lor x = -3$

Bruchgleichungen

Eine Sonderform von quadratischen Gleichungen sind *Bruchgleichungen*, in denen die Unbekannte sowohl im Zähler als auch im Nenner auf gegenüberliegenden Seiten vorkommt.

Ermitteln Sie zunächst eventuelle Definitionslücken. Denn die beidseitige Multiplikation mit den Nennern ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn sie nicht 0 sind. Dementsprechend müssen Sie gewisse Lösungen von vornherein ausschließen.

Beispiel: Bruchgleichung

Passend dazu lösen wir die Selbsttest-Aufgabe 1g):

$$\frac{2}{x+1} = \frac{x+7}{3}$$

Sobald x irgendwo im Nenner steht, verkleinert sich die Menge der erlaubten Werte. Denn für $x = -1$ ist die Gleichung nicht definiert, weil keine 0 im Nenner stehen darf. Die Definitionsmenge in diesem Beispiel ist also nicht $\mathbb{R}$, sondern $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, –1 nennt man auch eine *Definitionslücke*.

Um die Gleichung zu lösen, müssen Sie auf beiden Seiten mit $(x + 1)$ multiplizieren. Das dürfen Sie nur, weil Sie wissen, dass x nicht –1 sein kann, denn die Multiplikation mit 0 wäre keine erlaubte Äquivalenzumformung. Es steht also da:

$$2 = \frac{(x+7)(x+1)}{3}$$

Multiplizieren Sie auf beiden Seiten mit 3, dann rechnen Sie die Klammer aus:

$6 = x^2 + 8x + 7$

Ab hier können Sie mit der quadratischen Ergänzung vorgehen wie bekannt. Eine wunderbare Entspannungsübung!

3.4 Gleichungssysteme

Viele Aufgaben in der Mathematik kommen nicht mit einer, sondern mit zwei Unbekannten daher. Eine einzige Gleichung mit zwei Unbekannten hat keine eindeutige Lösung, aber wenn eine zweite Gleichung hinzukommt, sieht die Sache im Allgemeinen anders aus. Dasselbe gilt analog für eine dritte Unbekannte. Bleiben wir aber im Moment bei zwei Dimensionen.

Lineare Gleichungssysteme

Entscheidend ist: Jede Gleichung mit zwei Unbekannten kann *einzeln* nicht eindeutig gelöst werden. Sie müssen beide Gleichungen geschickt *verknüpfen*, um eine Unbekannte zu *eliminieren*, sodass Sie deren Zahlenwert eindeutig bestimmen können. Ersetzen Sie jedes Auftreten der nun bekannten Unbekannten durch ihren genauen Wert, wird das Gleichungssystem zu zwei äquivalenten Gleichungen mit nur einer Unbekannten (der zweiten), dessen Lösung wie gehabt geschieht.

Da aller guten Dinge drei sind, gibt es zur Lösung solcher Gleichungssysteme drei verschiedene Verfahren, die ich Ihnen jeweils anhand eines Beispiels zeige.

Das Gleichsetzungsverfahren

Ich demonstriere Ihnen zunächst das *Gleichsetzungsverfahren*, weil es besonders intuitiv funktioniert.

Beispiel: Lineares Gleichungssystem lösen

Dazu nehmen wir uns die zweite Aufgabe aus dem Selbsttest vor:

$$\left|\begin{array}{r} 2x+4=2y+1 \\ y-2=2x+6 \end{array}\right|$$

Wie Sie sehen, setzt man zwei zusammengehörende Gleichungen zwischen vertikale Balken, um sie als System aufzufassen.

Jetzt stellen Sie beide Gleichungen so um, dass eine Seite jeder Gleichung exakt gleich aussieht und jedes Auftreten einer der beiden Unbekannten enthält. Addieren Sie zur ersten Gleichung einfach +2. Dann erhalten Sie:

$$\left|\begin{array}{r} 2x+6=2y+3 \\ y-2=2x+6 \end{array}\right|$$

Sie sehen: Oben links steht das Gleiche wie unten rechts.

Folglich können Sie den Term oben rechts mit jenem unten links *gleichsetzen*:

$$2y+3=y-2$$

Diese einzelne Gleichung mit einer Unbekannten lässt sich mit den bekannten Mitteln fix lösen:

$$y+3=-2$$

$$y=-5$$

Setzen Sie nun den bekannten Wert von y in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein (in welche, ist egal):

$$2x+6=2\cdot(-5)+3$$

$$2x+6=-7$$

$$2x=-13$$

$$x=-6{,}5$$

Damit sind Sie fertig und können die Lösungsmenge angeben:

$$L=\{(-6{,}5;-5)\}$$

Das einzige Element der Lösungsmenge ist ein *Zahlentupel*, geschrieben mit Klammern, also (–6,5; –5) oder übereinander $\binom{-6{,}5}{-5}$, bestehend aus den Werten für x und y. Alternativ geben Sie die Lösung ohne Mengenschreibweise an:

$$x=-6{,}5 \ \wedge \ y=-5$$

Das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren

Als zweites Lösungsverfahren zeige ich Ihnen das *Subtraktionsverfahren* (das mit dem *Additionsverfahren* nahezu identisch ist). Wenn Sie zuvor eine der zwei Gleichungen auf beiden Seiten mit -1 multiplizieren, wird aus dem Subtraktions- das Additionsverfahren – bei genau gleichem Lösungsverlauf.

Beispiel: Das Subtraktionsverfahren

Nehmen wir uns das folgende Gleichungssystem vor:

$$\left|\begin{array}{r} 2x+4=2y+1 \\ y-2=2x+6 \end{array}\right|$$

Zufälligerweise kommt in beiden Gleichungen das x mit dem gleichen Faktor vor. Das ist immer ein guter Grund, zum Subtraktionsverfahren zu greifen.

Drehen Sie die zweite unserer beiden Gleichungen um, dann subtrahieren Sie sie von der ersten, Seite für Seite:

$$\begin{array}{r} \left|\begin{array}{r} 2x+4=2y+1 \\ 2x+6=y-2 \end{array}\right| \\ \hline -2=y+3 \\ y=-5 \end{array}$$

Setzen Sie wie gehabt den gefundenen Wert in eine der beiden Gleichungen ein. Zum Beispiel in die untere, weil y dort ohne Faktor vorkommt:

$$-5-2=2x+6$$

$$2x=-13$$

$$x=-6{,}5$$

Die Lösungsmenge ist also: $L=\{(-6{,}5;\ -5)\}$

Kapitel 9

Vielleicht sechs Richtige

Lottospielen ist etwas für Leute, die dieses Kapitel dringend lesen sollten, egal ob sie das Wort »Binomialkoeffizient« schon mal gehört haben oder nicht. Die zugehörige Mathematik ist nicht intuitiv verständlich (im Gegensatz, sagen wir, zum Fall aus einem Fenster). Sonst würde niemand Lotto spielen, und Fußballwetten-Anbieter hätten ernsthafte Schwierigkeiten, Kunden zu finden.

9.1 Testen Sie sich selbst

Wo stehe ich?

Wenn Sie in einer Naturwissenschaft irgendeinen Wert messen – sagen wir, die Oberflächenschwerkraft von Proxima Centauri b – dann ist das nur die halbe Miete. Sie müssen gleichzeitig wissen, wie genau (oder ungenau) Ihre Messung ist.

Wer im Spiel Pech hat, glaubt intuitiv, dass er nur weiterspielen muss, um »logischerweise« irgendwann zum Ausgleich auch mal Glück zu haben. Wer Glück hat und gewinnt, fühlt sich bestätigt und versucht es gleich noch einmal. Deshalb macht Glücksspiel abhängig. Ob in Suchttherapie-Sitzungen gelegentlich mathematische Formeln vorkommen, entzieht sich meiner Kenntnis. Schauen Sie doch mal, ob Sie die folgenden kennen:

1. Das Forschungsraumschiff VOLTZ I hat den Orbit von Proxima Centauri b erreicht und setzt 10 Sonden ab, die die Erdbeschleunigung (oder besser: Proxima-Centauri-b-Beschleunigung) an der Oberfläche messen sollen. Sie liefern folgende Ergebnisse (alle in m/s^2):

   Tag 1:

   9,9 – 12,1 – 11,2 – 13,0 – 13,0 – 12,9 – 13,3 – 12,0 – 14,0 – 12,6

   Tag 2:

   13,4 – 13,9 – 14,6 – 11,3 – 10,4 – 12,0 – 9,8 – 11,8 – 13,8 – (Sonde Nr. 10 antwortet nicht mehr)

   Berechnen Sie den Mittelwert mit Taschenrechner oder Software Ihrer Wahl.
2. Ein Bundesliga-Spieler, dessen Namen wir diskret verschweigen, erreichte in den 17 Spielen der Hinrunde 2017/2018 folgende Noten in einem einschlägigen Fachmagazin:

   2,0; 3,0; 2,0; 3,0; 3,5; 3,0; 3,0; 2,0; 2,0; 3,0; 3,0; 3,0; 2,0; 2,5; 3,5; 2,5; 2,0

   Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung.
3. Spielen Sie Monopoly?

   a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei Monopoly (also mit zwei sechsseitigen Würfeln) eine Zwei zu werfen?

   b) Wie oft müssen Sie im Schnitt würfeln, um einen Pasch zu erreichen (also zwei gleiche Augenzahlen), der nötig ist, um das Gefängnis zu verlassen?

9.2 Statistik

Grundsätzlich dient die Statistik dazu, eine große Anzahl von Werten auf weniger und überschaubarere Werte zu reduzieren. Wenn Sie beispielsweise ein Land regieren müssen, können Sie nicht jeden einzelnen Bürger nach seiner Meinung zu einem wichtigen Thema fragen, sondern Sie führen eine Umfrage durch (oder eine Wahl). Dabei können alle möglichen Dinge schiefgehen: Beispielsweise könnten Sie über die Notwendigkeit einer neuen Umgehungsstraße versehentlich deutlich mehr Bahn- als Autofahrer befragen, und schon wäre Ihr Umfrageergebnis nicht repräsentativ.

Arithmetisches Mittel

Lassen Sie uns also zunächst weniger komplexe Merkmale statistisch erfassen, beispielsweise den in der ersten Selbsttest-Aufgabe erwähnten Planeten Proxima Centauri b beziehungsweise dessen Schwerkraft.

Gefragt war zunächst nach dem Mittelwert. Dieses *arithmetische Mittel* (*Durchschnitt* oder *empirischer Mittelwert*) ist immer die Summe aller Einzelwerte geteilt durch deren Anzahl:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

In dieser Formel stecken gleich mehrere erklärungsbedürftige Schreibweisen: Der arithmetische Mittelwert wird geschrieben als $\bar{x}$ (gelesen: »x quer«). Das große griechische Sigma steht für »Summe«, und zwar die Summe über die rechts davon stehenden Summanden, in diesem Fall die x_i. Diese wiederum sind n Einzelwerte x_i, wobei das tiefgestellte i der Index (die laufende Nummer) der Werte ist und von 1 bis n läuft. Tiefgestellte Indexnummern werden sehr oft verwendet, um mehrere verschiedene Werte gemeinsam zu betrachten. Die Messwerte eines Experiments können beispielsweise mit x_i bezeichnet werden, oder auch Würfelergebnisse. Der erste Wert ist x_1, der zweite x_2, der i-te x_i und der letzte x_n.

Das Summenzeichen bedeutet also:

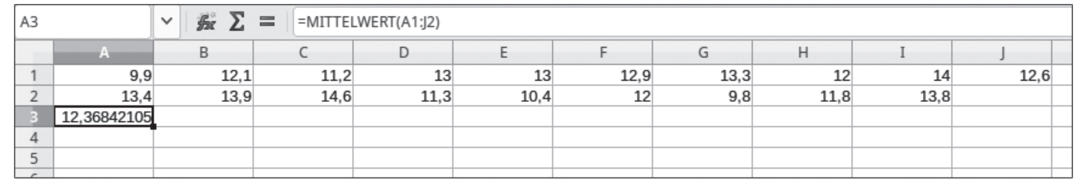
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Am besten nehmen Sie sich jetzt die in der Selbsttest-Aufgabe angegebenen Werte vor.

Beispiel: Arithmetisches Mittel

Da Sie guten Gewissens davon ausgehen können, dass sich die Gravitation des Planeten nicht ändert, können Sie die Messwerte von Tag 1 und Tag 2 in einen Topf werfen. Ein Wert fehlt, weil die zuständige Sonde den Geist aufgegeben hat, also gibt es 19 Messwerte. Deren Summe ergibt den Wert 235 m/s^2, dividiert durch 19 erhalten Sie 12,4.

Anstelle eines Taschenrechners können Sie eine Tabellenkalkulation verwenden. Geben Sie einfach alle Messwerte ein, und geben Sie dann in ein leeres Feld eine Formel ein (Abbildung 9.1).


A3 =MITTELWERT(A1:J2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	9,9	12,1	11,2	13	13	12,9	13,3	12	14	12,6
2	13,4	13,9	14,6	11,3	10,4	12	9,8	11,8	13,8	
3	12,36842105									
4										
5										

Abbildung 9.1 Tippen Sie die Messwerte z. B. in LibreOffice Calc ein, schreiben Sie in eine leere Zelle »=Mittelwert(«, dann ziehen Sie mit der Maus ein Gummiband über die Messwerte. Drücken Sie dann Enter.

Der ausgeworfene Mittelwert hat natürlich viel zu viele Nachkommastellen, das sehen Sie sofort. Einigen wir uns zunächst auf einen Mittelwert von 12,4 m/s^2, also etwas mehr als unsere Erdbeschleunigung.

Sie können natürlich auch Sage zur Berechnung des Mittelwerts verpflichten. Packen Sie dazu zunächst die 19 Messwerte in eine Array-Variable. Achten Sie darauf, dass Sie statt Dezimalkomma einen Dezimalpunkt eingeben müssen. Rufen Sie dann die Funktion `mean()` mit der definierten Variablen als Parameter auf.

```
sage: W=[9.9, 12.1, 11.2, 13,13,12.9, 13.3, 12, 14, 12.6, 13.4, 13.9, 14.6,
11.3, 10.4, 12, 9.8, 11.8, 13.8]
sage: mean(W)
12.3684210526316
```

Für den Fall, dass Sie manchen Sonden mehr vertrauen als anderen (einige sind vielleicht schon etwas angerostet), können Sie deren Messwerte höher gewichten. Dazu sollten Sie die Formel für ein *gewichtetes arithmetisches Mittel* kennen, in der zu jedem Messwert x_i ein Gewichtungsfaktor w_i gehört:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

(Wie Sie sehen, kann man das Kleingedruckte auch neben statt über und unter das Sigma-Symbol schreiben, wenn man wenig Platz hat.)

Falls Sie die Gewichtungsfaktoren geschickt so wählen, dass sie die Summe 1 ergeben, entfällt der Nenner.

Nicht unerwähnt bleiben soll das *harmonische Mittel*, das schon der gute alte Pythagoras kannte:

$$\bar{x}_{\text{harm}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Der Übersicht halber lasse ich die Detailangaben am Summenzeichen weg, wenn sie selbsterklärend sind: Fast immer läuft i von 1 bis n.

Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist übrigens das arithmetische Mittel der Kehrwerte:

$$\frac{1}{\bar{x}_{\text{harm}}} = \frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}$$

Geometrisches Mittel

Ein anderer Mittelwert ist das *geometrische Mittel*. Es ist nur für Werte größer als null definiert. Statt wie beim arithmetischen Mittel die Einzelwerte zu addieren und dann durch ihre Anzahl zu teilen, multiplizieren Sie alle Werte miteinander und ziehen die n-te Wurzel:

$$\bar{x}_{\text{geometrisch}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \mathrm{x}_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Beispielsweise kommt das geometrische Mittel in der Finanzwelt zum Einsatz, wenn verschiedene jährliche Zinsfaktoren gemittelt werden sollen.

»Geometrisch« heißt dieser Mittelwert, weil er aus einem Rechteck ein Quadrat macht. Das geometrische Mittel der beiden Seitenlängen a, b eines Rechtecks ist ja:

$$\bar{x}_{\text{geometrisch}} = \sqrt{ab}$$

Das Rechteck hat den gleichen Flächeninhalt $F = ab$ wie das Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{ab}$:

$$F_{\blacksquare} = \sqrt{ab}\sqrt{ab} = ab$$

Analog entspricht das geometrische Mittel der drei Seitenlängen eines Quaders der Seitenlänge eines Würfels mit gleichem Rauminhalt.

Median

Ebenfalls kennen sollten Sie den *Median*. Der Median (oder *Zentralwert*) teilt die Messwerte eines Datensatzes in zwei Hälften, sodass die Werte der unteren Hälfte kleiner oder gleich dem Median sind und die der oberen größer oder gleich. Um den Medien einer Messreihe zu bestimmen, ordnen Sie die Messwerte aufsteigend. Ist die Anzahl der Messwerte ungerade, ist der Median der Wert, der in der Mitte steht, ansonsten der arithmetische Mittelwert der beiden Werte links und rechts der Mitte.

Beispiel: Der Median der Klausurnoten

In der letzten Matheklausur des Leistungskurses an der Albert-Einstein-Schule in Radevormwald haben die 11 Schüler folgende Noten erreicht:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

Der Median ist die Note 2, der Wert genau in der Mitte. Wenn ein Datensatz nicht wie hier vorsortiert oder zu groß und unübersichtlich ist, können Sie natürlich Sage die Berechnung überlassen:

```
sage: W= [ 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6 ]
sage: median(W)
2
```

Zum Vergleich: Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist ungefähr 2,8.

Der Median berücksichtigt im Gegensatz zum arithmetischen Mittel Ausreißer weniger, also einzelne, starke Abweichungen.

Deutlicher wird der Unterschied, wenn Sie sich die Jahresgehälter von 5 Autofahrern anschauen, die rein zufällig auf der Autobahn hintereinander im Stau stehen:

28 000 €, 32 000 €, 36 000 €, 42 000 €, 950 000 €

Der besonders genervte Porschefahrer ganz hinten ist möglicherweise Vorstandsvorsitzender einer größeren Firma. Einerlei: Das arithmetische Mittel der fünf Gehälter ist 217.600. Sie werden den meisten der fraglichen Autofahrer zustimmen, wenn die sagen: »Das ist jetzt aber nicht sehr repräsentativ.«

Der eine Ausreißer – der Vorstandsvorsitzende – verfälscht den Mittelwert deutlich nach oben. Anders beim Median, denn der beträgt 36 000. Er liegt sehr nah am arithmetischen Mittel der vier »Normalverdiener« (34 500).

Sie sehen: Der Median eignet sich gut, um eine gegenüber Ausreißern robuste Mittelwertschätzung zu erhalten.

Wie akkurat Ihre Mittelwerte sind, verraten diese allerdings nicht. Dafür benötigen Sie andere Größen.

Standardabweichung und Varianz

Wer einen Mittelwert angibt, sollte so ehrlich sein, auch über dessen Genauigkeit eine Aussage zu machen. Schauen Sie sich die Zahlen des Bundesligaspielers aus der zweiten Selbsttest-Aufgabe an:

Beispiel: Mittelwert und Standardabweichung

2,0; 3,0; 2,0; 3,0; 3,5; 3,0; 3,0; 2,0; 2,0; 3,0; 3,0; 3,0; 2,0; 2,5; 3,5; 2,5; 2,0

Diese 17 Schulnoten ergeben einen Durchschnitt von etwa 2,6. (Mehr Nachkommastellen anzugeben, ergibt bei Schulnoten wenig Sinn.) Sie sehen an den ursprünglichen Zahlen gewisse Leistungsschwankungen, aber nie eine 1,5 oder besser und auch nie eine 4,0 oder schlechter. Man könnte also sagen, dass die Leistung dieses Spielers relativ konstant ist. Das lässt sich auch in Zahlen ausdrücken, indem Sie die *Varianz der Stichprobe* (also der 14 vorliegenden Noten) berechnen. Dazu summieren Sie die Quadrate der Abweichungen vom Mittelwert und teilen durch die Anzahl der Messwerte minus eins. Die Summe der Abweichungen vom Mittelwert ergibt ein Maß für die Streuung, genannt *Varianz*:

$$v = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Im Nenner steht $n-1$ statt n, um deutlich zu machen, dass es keinen Sinn ergibt, die Varianz von nur einem Messwert zu berechnen. Sie brauchen mindestens zwei, sonst steht im Nenner eine 0.

Leider hat die Varianz nicht dieselbe Maßeinheit wie die Ursprungswerte, sondern deren Quadrat. Die Varianz der Noten des fraglichen Fußballspielers hätte also die Einheit »Noten-Quadrat«, unter der nicht nur Sie sich nicht das geringste vorstellen können. Deshalb ist es hilfreich, die Wurzel aus der Varianz zu ziehen und das Resultat als sinnvolles Maß für die Streuung zu verwenden. Das ist dann die *empirische Standardabweichung*:

$$s = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Geben Sie die Noten in Sage oder LibreOffice Calc ein.

In Sage ermitteln Sie Mittelwert, Standardabweichung und Varianz wie folgt:

```
sage: N=[2,3,2,3,3.5,3,3,2,2,3,3,3,2,2.5,3.5,2.5,2]
sage: mean(N)
2.64705882352941
sage: std(N)
0.552401175617440
sage: variance(N)
0.305147058823529
```

Für die Varianz verwenden Sie in Calc `VARIANZ()`, für die Standardabweichung `STABW()`.

Die Standardabweichung der obigen Spieltagsnoten ergibt also gerundet auf die erste Nachkommastelle 0,6. Das ist ein Wert, der Ihnen (und Vereinen, die am Kauf des Spielers interessiert sind) ein gutes Gefühl für seine Konstanz gibt. Sie können diesen Wert auch prozentual angeben, indem Sie durch den Mittelwert teilen: Dann liegt die (einheitenlose) *relative Standardabweichung* bei 20 %.

Sie können die Standardabweichung als Maß für die Streuung bei einer Messung oder für die Ungenauigkeit einer Größenangabe verwenden. Zum Beispiel ist die Stärke des fraglichen Spielers über die betrachteten Spiele gemittelt $Q_{\text{Spieler}} = 2{,}6 \pm 0{,}6$. Gleichzeitig zeigt Ihnen diese Genauigkeitsangabe, wie viele signifikante Stellen Sie sinnvollerweise angeben können. Bei einer Unsicherheit von 0,6 wären weitere Stellen hinter dem Komma uninteressant und damit verschwendete Druckerschwärze – genau wie mehr als eine signifikante Stelle in der Standardabweichung. Es ist aus dem gleichen Grund selten sinnvoll, die Ungenauigkeit selbst auf mehrere Stellen genau anzugeben: Es ist egal, ob der Wert zwischen 2 und 3,2 schwankt (2,6 $\pm$ 0,6) oder zwischen 2,001 und 3,199 (z. B. 2,6 $\pm$ 0,599).

Eine alternative Schreibweise für eine Ungenauigkeitsangabe ist übrigens eine Klammer hinter der fraglichen Stelle, also: $Q_{\text{Spieler}} = 2{,}6(6)$.

Je niedriger eine Standardabweichung ist, umso eindeutiger festgelegt, umso *deterministischer* ist das gemessene Phänomen. Wenn beispielsweise elf Personen die Länge eines Fußballplatzes mit der Länge ihrer Schritte zu bestimmen versuchen, werden Sie eine deutlich höhere Standardabweichung erhalten, als wenn Sie mehrmals mit einem Laser-Messgerät die Länge Ihres Schreibtisches ermitteln.

Der Extremfall ist eine völlig zufällige Streuung.

Beispiel: Streuung von Würfeln

Wenn Sie sehr oft sechsseitige Würfel werfen, ist der Mittelwert ziemlich genau 3,5 (genauer gehe ich im nächsten Abschnitt darauf ein). Die Standardabweichung wäre dann beispielsweise:

$$s = \sqrt{\frac{1}{5}((1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + \dots + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2)} \approx 1{,}9$$

Das sind fast zwei Augen! Prozentual bedeutet das eine Standardabweichung von satten 53 % der mittleren Augenzahl. Natürlich handelt es sich hier um einen idealen Würfel und letztlich um ein Gedankenexperiment. In der empirischen Wissenschaft bekommen Sie es hingegen mit realen Messwerten zu tun. Wenn deren relative Standardabweichung so hoch ist wie bei den Würfeln, dann meistens, weil ein angenommener Zusammenhang überhaupt nicht existiert. Zum Beispiel beim Versuch, verdeckte Wassergläser mit einer Wünschelrute aufzufinden.

Normalverteilung

Messungen physikalischer Größen folgen hingegen eher einer *Normalverteilung*. Streuende Werte liegen dann häufig in der Nähe des tatsächlichen Betrags und seltener in einem größeren Abstand.

Nach einigen Wochen im Orbit um den Planeten Proxima Centauri b hat unser Forschungsraumschiff nicht weniger als 333 Messwerte für die Schwerkraft ermittelt. Wir drucken sie hier nicht ab, sondern zeigen nur, wie sie sich verteilen.

Dazu legt der Wissenschaftsoffizier neun *bins* (Eimer) fest. Die Eimer erhalten aufeinanderfolgende Minimal- und Maximalwerte. Dann zählt der Wissenschaftsoffizier, wie viele Messwerte in welchen Eimer gefallen sind, und zeichnet ein *Histogramm* (Abbildung 9.2).

Das Histogramm zeigt beispielsweise, dass 85 Messwerte zwischen 12,4 und 12,7 m/s^2 liegen, das ergibt den höchsten Balken. Die wenigsten Messwerte (3) liegen zwischen 13,75 und 14,1 (Balken ganz rechts).

Gut möglich, dass auf dem Bordcomputer der VOLTZ I die Software Sage installiert ist. Damit gelingt dieser Plot besonders einfach:

```
G=[12.5, 12.5, 11.7, …]
histogram(G)
```

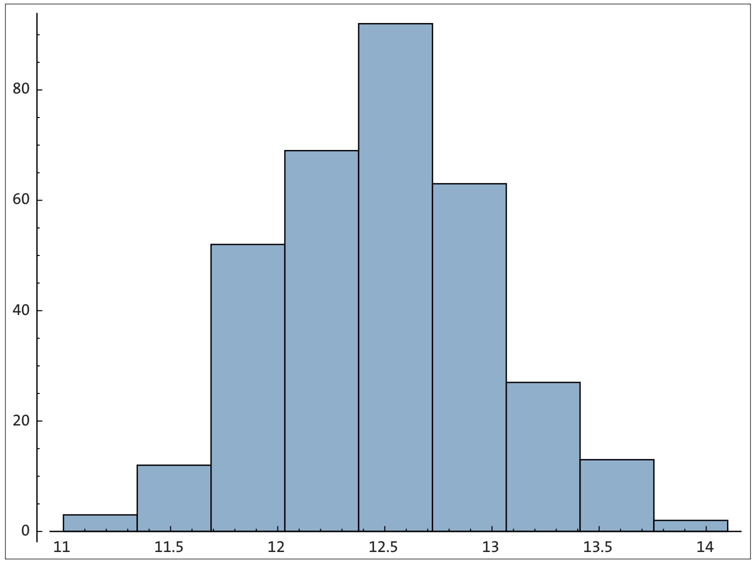



Abbildung 9.2 Das mit Sage geplottete Histogramm der Erdbeschleunigungsmesswerte von Proxima Centauri b zeigt eine typische Glockenkurve.

Die erkennbare *Glockenkurve* ist typisch für Histogramme über stetige Variable, also die meisten physikalischen Messwerte. Mathematisch haben wir es mit einer gaußschen Glockenkurve zu tun, deren Dichtefunktion folgende Darstellung hat:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Dabei ist $\bar{x}$ der Mittel- oder Erwartungswert und σ (Sigma) die Standardabweichung.

Die Normalverteilung setzt die Häufigkeit von Messwerten mit ihrer Entfernung vom Erwartungswert in Beziehung. Im Detail rechne ich Ihnen das hier nicht vor, aber Folgendes sollten Sie wissen:

- Etwa 68 % aller Messwerte liegen maximal eine Standardabweichung vom Erwartungswert entfernt.
- Nicht weniger als 95 % aller Messwerte liegen maximal zwei Standardabweichungen vom Erwartungswert entfernt.
- Sogar 99,7 % der Messwerte liegen maximal drei Standardabweichungen entfernt.

Somit bildet die Standardabweichung ein gutes Maß für die Mess(un)genauigkeit.

Carl Friedrich Gauß

Der deutsche Wissenschaftler Johann Carl Friedrich Gauß lebte von 1777 bis 1855. Gauß betätigte sich erfolgreich in der Statistik, Analysis, Geometrie, Astronomie, Physik und – der Vermessung des Königreichs Hannover.

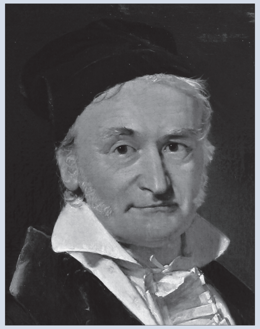


Abbildung 9.3 Gauß auf einem Gemälde von Gottlieb Biermann (gemeinfrei, Quelle: Wikimedia)

Wegen der großen Anzahl seiner Entdeckungen und Lösungen kann Gauß ohne Übertreibung als einer der größten Wissenschaftler aller Zeiten gelten.

Außerdem machte er ein Vermögen mit Eisenbahnaktien.

9.3 Wahrscheinlichkeit

Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Stochastik*) ist es, bestimmten Ereignissen gewisse Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, also das Verhältnis zwischen der Häufigkeit eines bestimmten Ereignisses und deren Gesamtanzahl. Der Würfelwurf zählt dabei zu den sogenannten *Laplace-Experimenten*, bei denen jedes einzelne Ergebnis des *Ergebnisraums* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gleich wahrscheinlich ist. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Zahl zu werfen, ist also unabhängig von der gewählten Zahl $P = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit für die anderen Zahlen ist $P = \frac{5}{6}$, und die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse ist immer $P = 1$. Demzufolge ist eine Wahrscheinlichkeit immer eine einheitenlose Zahl zwischen 0 und 1. Gerne wird sie daher prozentual angegeben, also mit Werten zwischen 0 % und 100 %.

Aufpassen müssen Sie bei umgangssprachlichen Angaben wie »1 zu 5«, womit manchmal 1 erfreuliches versus 5 unerfreuliche Ergebnisse gemeint ist (also insgesamt 6) – anders als mit »1 von 6«, wo klar von 6 verschiedenen möglichen Ausgängen die Rede ist.

Addition und Produkt

Wenn zwei Ereignisse *unvereinbar* sind, also nicht gleichzeitig eintreten können (z. B. eine 1 und eine 2 gleichzeitig mit einem Würfel werfen), so sind deren Ergebnismengen *disjunkt*, die Schnittmenge also leer: $A \cap B = \emptyset$. Wie schon oben implizit unterstellt, ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des eines oder anderen Ereignisses die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, also:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Verallgemeinert können A und B auch Mengen von Ergebnissen sein. Sind diese nicht disjunkt, müssen Sie für die Wahrscheinlichkeit einer Oder-Verknüpfung die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge abziehen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ein Beispiel dafür wäre ein Würfelexperiment wie dieses:

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine ungerade Zahl oder eine Zahl unter 4 gewürfelt wird?

Die Ereignisse sind in diesem Spiel $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Da beide die *Mächtigkeit* 3 haben, ist $P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Die Schnittmenge ist $A \cap B = \{1, 3\}$, demzufolge ist $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Eine Und-Verknüpfung von zwei unabhängigen Ereignissen entspricht einer Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel: In Monopoly zwei Augen würfeln

Jetzt können Sie den ersten Teil der Selbsttest-Aufgabe zu Monopoly beantworten: Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei Einser zu erzielen, ist $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Laplace-Experimente

Angenommen, Sie gewinnen ein Würfelspiel immer dann, wenn Sie eine ungerade Zahl werfen. Dann ist $A = \{1, 3, 5\}$ jene Teilmenge des Ereignisraums, die Sie zum Sieger macht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg ist dabei die Anzahl der günstigen Ergebnisse geteilt durch deren Gesamtanzahl, in diesem Fall also $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Wenn Sie mit zwei oder mehr Würfeln spielen, gibt es insgesamt 36 verschiedene Ereignisse. Davon ergeben einige aber gleiche Summen. Geht es also um die gewürfelte Gesamtaugenzahl, liegt kein Laplace-Experiment mehr vor, da nicht alle Ergebnisse aus dem Ergebnisraum gleich wahrscheinlich sind.

Hingegen ist es sehr wohl ein Laplace-Experiment, Ereignisse wie die folgenden zu betrachten:

Beispiele für Ereignisse in einem Laplace-Experiment

- *Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl (»Pasch«).* Genau 6 der insgesamt möglichen 36 Ereignisse (1 und 1, 2 und 2 usw.) ergeben einen Pasch, die Wahrscheinlichkeit ist also $P_{\text{Pasch}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Das Gefängnis in Monopoly zu verlassen zu können, ist also (bei einem Wurf) genauso wahrscheinlich, wie bei »Mensch ärgere dich nicht« eine 6 zu werfen, sich also zum erneuten Würfeln zu qualifizieren.
- *Mindestens ein Würfel zeigt eine 6.* Wenn Sie die 36 möglichen Ereignisse aufschreiben und nachzählen, kommen Sie auf 11 Fälle, in denen mindestens ein Würfel eine 6 zeigt. Oder Sie rechnen nach: In 6 Fällen zeigt der erste Würfel eine 6, dann ist der andere egal. Hinzu kommen 5 Fälle, in denen Würfel Nummer zwei 6 Augen zeigt. Der Fall der Doppel-6 ist bereits in den ersten 6 enthalten. Macht also insgesamt 11.
- *Sie würfeln eine Summe von 2 oder mehr.* Nein, das ist keine Fangfrage. Tatsächlich erfüllt jedes der 36 möglichen Ergebnisse diese Forderung. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{36}{36}$ oder 100 %. Man nennt dergleichen auch ein *sicheres Ereignis*. Umgekehrt wäre die Forderung, eine Summe von 1 zu werfen, ein *unmögliches Ereignis* mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 %.
- *Sie setzen beim Roulette immer auf Rot.* Beim Roulette gibt es 37 gleich wahrscheinliche Ereignisse, der Ergebnisraum ist {0, 1, 2, ... 36}. Von den 37 Zahlen sind 18 rot und 18 schwarz, die 0 ist grün. Die erfolgreiche Teilmenge des Ergebnisraums ist die Menge der roten Zahlen auf dem Roulettetisch: {1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}. Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Zahl ist also $\frac{18}{37} \approx 49$ %, ebenso wie für eine schwarze. Zu knapp 3 % fallen die Kugeln in die 0, und die Bank gewinnt. Auch wenn Sie bei jedem Sieg das Doppelte des Einsatzes zurückerhalten, verlieren Sie auf lange Sicht immer Geld, selbst wenn Sie auf die geniale Idee kommen, immer gleich viel auf Rot und Schwarz zu setzen. Aber das Casino muss ja auch von irgendwas leben, nicht wahr?

Würfel haben keine Erinnerung: Poisson-Verteilungen

Eingangs wies ich auf die gefährliche und nicht gut funktionierende menschliche Intuition in Bezug auf Wahrscheinlichkeiten hin. Wenn beim Roulette die Kugel mehrmals hintereinander rote Zahlen ergibt, dann erscheint es intuitiv logisch, dass danach sicher endlich mal wieder eine schwarze kommt. Allerdings hat das Roulette kein Gedächtnis, genauso wenig wie ein Würfel, eine Münze oder die Lottokugeln. Denen ist es so was von egal, was in der letzten Runde passiert ist. Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 ist beim

Würfel bei jedem Wurf $\frac{1}{6}$, selbst wenn vorher z. B. schon dreimal hintereinander eine 6 geworfen wurde.

Dahinter steckt das *empirische Gesetz der großen Zahlen*. Es besagt, dass sich die relativen Häufigkeiten für Ereignisse für sehr viele Wiederholungen stabilisieren, also der theoretischen Wahrscheinlichkeit annähern. Die absoluten Häufigkeiten hingegen tun das nicht, sie können jederzeit fluktuieren.

Bei einer kleinen Anzahl von Spielen gilt wiederum das *Gesetz der kleinen Zahlen*. Es ist anwendbar, wenn n voneinander unabhängige Spielrunden mit jeweils n möglichen Ergebnissen ausgeführt werden. Ein einfaches Beispiel: Sie würfeln sechsmal mit einem normalen Würfel. Dann werden Sie wohl kaum jede der sechs möglichen Augenzahlen genau einmal würfeln. Vielmehr werden Sie ungefähr zwei Zahlen (also ein Drittel der sechs Möglichkeiten) überhaupt nicht würfeln, zwei weitere einmal und eine weitere zweimal. Nur zwei Drittel der möglichen Ergebnisse erscheinen also, daher heißt das Gesetz auch *Zwei-Drittel-Gesetz*. Natürlich funktioniert das nicht immer, aber wenn Sie mehrfach solche 6er-Runden spielen, geht die Tendenz klar in diese Richtung.

Dahinter steckt die *Poisson-Verteilung*. Sie beschreibt die Häufigkeit der verschiedenen möglichen Ereignisse entsprechend folgender Formel:

$$P(n) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$$

Dabei ist t die mittlere Anzahl der Ereignisse (z. B. pro Zeiteinheit oder Spielrunde) und n die Anzahl der verschiedenen Ereignisse. Der Ausdruck $n!$ steht für *Fakultät* und ist eine Abkürzung für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Eine Poisson-Verteilung liegt vor, wenn

a) es pro Zeiteinheit oder Spielrunde höchstens ein Ereignis gibt,
b) die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis in dieser Zeiteinheit zu finden, proportional zu deren Länge ist (bei Spielrunden ist das immer der Fall),
c) das Eintreten eines Ereignisses nicht durch vorherige Ereignisse beeinflusst wird.

Beispiel: Tore für Poisson

Ein tolles, anschauliches Beispiel dafür sind Fußballspiele. Eine Spielrunde entspricht einem Spiel, und die möglichen Ereignisse sind die Anzahl insgesamt gefallener Tore. Statistiker haben die durchschnittliche Anzahl Tore pro Spiel aus zig Jahren Fußball-Bundesliga ermittelt: Es sind etwa 3. Zeichnet man die Poisson-Verteilung für Spiele mit $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ Toren, ergibt sich ein Bild, das der Realität tatsächlich ziemlich nahekommt (Abbildung 9.4).

In der Tat ist Fußball ziemlich zufallsabhängig. Bei vielen Schüssen ist es Glücksache, ob der Ball im Tor landet oder nicht. Da die Anzahl ernsthafter Schüsse in den meisten Spielen größenordnungsmäßig nicht über 10 hinauskommt, ist die Zufallsabhängigkeit des Endergebnisses relativ hoch. Anders sieht es bei Spielen wie Handball aus: Dort fallen mehr Tore, und die Erfolgsquote bei Würfen ist höher. Deshalb ist der Zufallseinfluss beim Handball geringer als beim Fußball – und, so darf man vermuten, die Anziehungskraft auf die Zuschauer geringer. Denn wenn ein Außenseiter nicht die geringste Siegchance hat, ist der Reiz für einen Teil der Beobachter gering.

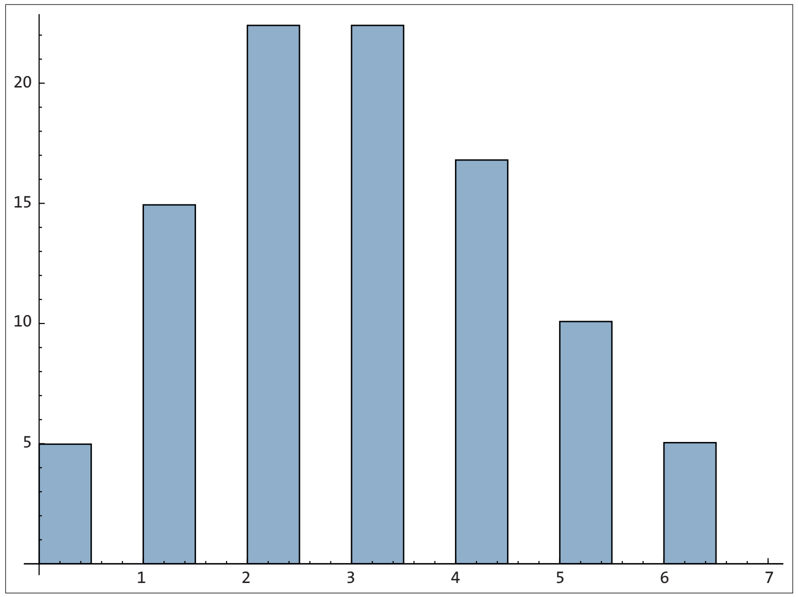


Abbildung 9.4 Die Poisson-Verteilung für einen Tordurchschnitt von 3 zeigt, wie häufig Spiele mit 0, 1, 2 usw. Toren vorkommen. Die vertikale Achse zeigt die prozentuale Häufigkeit von Spielen mit der entsprechenden Anzahl Tore. Der Sage-Befehl für diesen Plot lautet: bar_chart([100*(3^n)/factorial(n)*exp(-3).n() for n in range(0,7)], ymin=0)

Permutationen

Oft kommt es in Spielen auf eine Reihenfolge von Zufallsereignissen an. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie bei fünf Münzwürfen hintereinander die Zahl werfen? Wie viele verschiedene Reihenfolgen von Kopf und Zahl (oder anderen Zufallsereignissen) gibt es überhaupt?

Allgemeiner lässt sich die Frage so stellen: Auf wie viele verschiedene Arten können die Zahlen von 1 bis n angeordnet sein? Wie viele *Permutationen* einer Menge mit n Elementen gibt es?

Beispiel: Permutationen mit Spielkarten

Um das herauszufinden, nehmen Sie zunächst zwei beliebige Spielkarten zur Hand, beispielsweise einen König und eine Dame. Offensichtlich können Sie diese auf zwei verschiedene Weisen anordnen:

König – Dame

Dame – König

Also ist die Anzahl der Permutationen für eine Menge mit 2 Elementen gleich 2.

Fügen Sie jetzt ein Ass als dritte Karte hinzu. Sie können das Ass an drei Positionen legen: Vor die Dame, zwischen die beiden oder hinter den König. Die Anzahl der Permutationen steigt um einen Faktor 3, ist also $3 \cdot 2 = 6$.

Das Spielchen können Sie beliebig erweitern. Das Resultat für n Elemente ist das Produkt der Zahlen von 1 bis n, also $n!$, sprich: n *Fakultät*:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

Beispiel: Binäres Spiel mit Münzen – »Kopf oder Zahl«

Zurück zu den Münzen. Beim Münzwurf handelt es sich um ein »binäres« Spiel, also mit zwei möglichen Ergebnissen. Wiederholen Sie das Spiel n-mal (immer mit der gleichen, fairen Münze), und notieren Sie jeweils das Ergebnis (bei einer deutschen Euro-Münze: Adler oder Zahl), so erhalten Sie eine bestimmte Adler-Zahl-Abfolge der Länge n. Zum Beispiel:

Adler, Zahl, Zahl, Adler, Zahl, Zahl, Adler, Adler

Wenn k die Anzahl der Adler-Würfe ist, dann gibt es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Abfolgen. Für diesen etwas unhandlichen Ausdruck haben sich der Name *Binomialkoeffizient* und die abgekürzte Schreibweise $\binom{n}{k}$ etabliert, gesprochen: »n über k«. Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Teilmengen mit k Elementen aus einer Grundmenge mit n Elementen gebildet werden können.

Binomialkoeffizienten können Sie in Pyramidenform anordnen, wobei n jeweils die bei 0 beginnende Zeilennummer ist und k die Spaltennummer. Das hilft dabei, sich einige Rechenregeln vor Augen zu führen.

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{matrix}$$

So angeordnet ergibt jeder der Binomialkoeffizienten genau die Anzahl der möglichen Wege, um ihn von der Spitze der Pyramide aus zu erreichen. Diese Zahlen, erneut als Pyramide angeordnet, ergeben wiederum das *pascalsche Dreieck*, in dem jede Zahl die Summe der beiden darüberliegenden ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Die Summenregel des pascalschen Dreiecks liest sich geschrieben mit Binomialkoeffizienten so:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Da das pascalsche Dreieck symmetrisch zur vertikalen Achse ist, gilt für Binomialkoeffizienten ebenfalls ein Symmetriesatz:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge in n Münzwurf-Versuchen ist dann $P = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Das ist ein Spezialfall der folgenden Gleichung, in der es zwei unterschiedlich große Wahrscheinlichkeiten p und q für die beiden Ereignisse gibt:

$$P = \binom{n}{k} p^n q^{n-k}$$

Damit lassen sich jetzt die Eingangsfragen beantworten:

In 5 Münzwürfen 5 Erfolge zu erzielen, heißt, dass $n = k = 5$. Rechnerisch ist also die Wahrscheinlichkeit: $P = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 3\,\%$. In diesem Fall ist der Binomialkoeffizient 1, das Ergebnis ist dasselbe wie für 5 gleichzeitig geworfene Münzen. Denn wenn alle sowie dieselbe Seite zeigen, ist die Reihenfolge irrelevant. Für 3 Erfolge ist die Wahrscheinlichkeit natürlich $P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$.

Noch viel mehr Wissenswertes über Statistik und Stochastik finden Sie übrigens im Rheinwerk-Buch »Fit fürs Studium – Statistik«.

Kapitel 27

Willkommen in der Matrix

Eine Matrix eignet sich nicht nur bestens als Filmkulisse und zur einfachen Darstellung linearer Gleichungssysteme. Man kann noch viel mehr damit anstellen, wie dieses Kapitel zu berichten weiß.

27.1 Lineare Abbildungen

Im letzten Kapitel habe ich Ihnen eine Matrix-Schreibweise als Abkürzung für ein lineares Gleichungssystem aufgetischt. Schauen Sie sich einmal diese Schreibweise an:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechts steht der Nullvektor, links die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix. Diese Operation ist so definiert, dass unser Gleichungssystem herauskommt:

$$\begin{pmatrix} 2x + 4y \\ -3x - 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ganz ähnlich wie bei eindimensionalen Funktionen steckt dahinter eine Nullstellensuche: Welchen Vektor (x, y) muss ich in eine Abbildung stecken, damit am Ende (0,0) herauskommt?

So betrachtet ist unsere Matrix eine Funktion für Vektoren, genannt: *lineare Abbildung*.

Definition linearer Abbildungen

Die lineare Algebra beschäftigt sich mit linearen Abbildungen, und zur Sicherheit sollten wir uns darauf einigen, was das genau bedeutet:

Eine Abbildung A zwischen Vektorräumen V, W heißt *linear*, wenn für Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ und für beliebige Skalare k_1, k_2 der folgende Zusammenhang gilt:

$$A(k_1 \cdot \vec{v_1} + k_2 \cdot \vec{v_2}) = k_1 \cdot A(\vec{v_1}) + k_2 \cdot A(\vec{v_2})$$

Die Ergebnisvektoren einer solchen Abbildung nennt man auch *Bildvektoren*.

Beispiel: Lineare Abbildung

Untersuchen wir einmal die Abbildung, die hinter der oben genannten Matrix steckt, auf ihre Linearität. Dazu schicken wir einen Vektor rein, der eine Linearkombination von zwei anderen Vektoren ist (linke Seite obiger Gleichung) und vergleichen mit dem einzelnen Anwenden der Skalare und der Addition (rechte Seite):

$$\begin{pmatrix} k_1 v_{1x} + k_2 v_{2x} \\ k_1 v_{1y} + k_2 v_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sie sehen sofort: Dank der bekannten Rechengesetze stimmt das.

Eigenschaften linearer Abbildungen

Sie sind jetzt ja schon Experte für Vektoren, deshalb erlaube ich mir, fürderhin die Pfeile über den Buchstaben wegzulassen. Es wird Zeit, sich an diese Kurzschreibweise zu gewöhnen. Auch schreibe ich für lineare Abbildungen nicht mehr $A(\vec{v})$, sondern Av.

Mit dieser sparsamen Schreibweise tische ich Ihnen zunächst einige mehr oder weniger triviale Zusammenhänge auf.

- Jede lineare Abbildung liefert für den Nullvektor den Nullvektor:

  $A0 = 0$

- Es gilt das Distributivgesetz:

  $A(u + v) = Au + Av$

- Der *Nulloperator* ist eine lineare Abbildung:

  $0: v \to 0$

  Die zugehörige Matrix ist voller Nullen:

  $$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Die *Identität* ist eine lineare Abbildung:

  $I: v \to v$

  Diese Abbildung ändert den Ausgangsvektor nicht. Dazu gehört die *Einheitsmatrix*:

  $$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  Diese Matrix hat überall Nullen, nur auf der Diagonalen nicht.

  Natürlich gibt es die Identität nur für Vektorräume mit gleichen Dimensionen. Es gibt also beispielsweise keine identische Abbildung von Vektoren mit zwei Dimensionen auf solche mit drei.

- Eine Matrix kann quadratisch sein, muss sie aber nicht. Sie können ohne Weiteres eine lineare Abbildung wie diese hier betrachten:

  $$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Jede lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen V, W kann als Matrix dargestellt werden. Wenn die beiden Vektorräume die Dimensionen *n* bzw. *m* haben, so handelt es sich um eine $m \times n$-Matrix mit *m* Zeilen und *n* Spalten, dies ist die *Abbildungsmatrix*. Sind *m* und *n* gleich, ist die Matrix quadratisch.

- Die Koeffizienten der Matrix sind jene Koeffizienten, mit denen man die Bildvektoren der Basisvektoren von V für die Basisvektoren von W errechnen kann. Solange wir die Einheitsvektoren als Basis verwenden, ergibt sich die Matrix genau so, wie bisher in diesem Kapitel geschehen.
- Quadratische Matrizen bilden einen Vektorraum auf denselben Vektorraum ab, z. B. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Man nennt dies *Selbstabbildung* oder *Endomorphismus*.

Beispiel: Eine Abbildungsmatrix

Gegeben ist die Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit der folgenden Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lassen Sie uns den Bildvektor des Vektors $(-1, 2)$ berechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ -2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Kern, Bild und Dimensionsformel

Falls Sie Mathe studieren, sollten Sie noch ein paar abstrakte Begriffe kennen.

Die Menge aller Vektoren Av, also aller möglichen Bildvektoren für alle Vektoren $v \in V$, nennt man *Bild* von $A: V \to W$.

Das Bild von A ist ein Teilraum von W. Die Dimension des Bildes nennt man auch *Rang* der linearen Abbildung.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der *Kern* einer linearen Abbildung: Das ist die Menge der Vektoren von V, für die die lineare Abbildung den Nullvektor liefert, also: $\text{Kern } A = \{v \in V, Av = 0\}$

Der Kern ist nichts anderes als die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung $Av = 0$. Dazu gehört, wie Sie bereits wissen, auf jeden Fall der Nullvektor selbst.

Hieraus ergibt sich die *Dimensionsformel*. Sie besagt für lineare Abbildungen A über den n-dimensionalen Vektorraum V:

$$\dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A = n$$

Beispiel: Dimensionsformel

Schauen wir uns die Dimensionsformel für unser bewährtes Beispiel an:

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Die Dimension von $\mathbb{R}^2$ ist 2. Aber was ist der Kern?

Dazu lösen wir das homogene Gleichungssystem mit Sage:

```
sage: A=Matrix([[1,0],[2,-1],[-2,2]])
sage: A.solve_right(vector([0,0,0]))
(0, 0)
```

Das ist der Nullvektor. Also ist dim Kern $A = 0$.

Der Bildvektorraum lässt sich darstellen als jener Vektorraum, der aufgespannt wird aus den Bildvektoren einer Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Bildvektorraum hat also offensichtlich eine Dimension von 2. Dass die beiden Vektoren keine Einheitsvektoren sind, stört nicht – denn jede Basis hat ja die gleiche Dimension. Jedenfalls ist dim Bild $A = 2$.

Die Dimensionsformel lautet für unsere lineare Abbildung A also: $0 + 2 = 2$

Praktische Anwendungen

Was bisher ziemlich abstrakt und bisweilen ziemlich langweilig klingt, hat in den Wissenschaften erhebliche Bedeutung. Wie sich herausstellt, lassen sich sehr viele Zusammenhänge als lineare Abbildungen schreiben. Anwendungen gibt es in der Biologie, Elektrotechnik, Physik – aber vor allem in der Informatik. *Deep Learning*, also die Grundlage von Bild- und Spracherkennung, ist eines der wichtigsten Gebiete, Kryptografie ein anderes.

27.2 Verknüpfung linearer Abbildungen

Die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen ist erneut eine lineare Abbildung. Lassen Sie uns verschiedene Möglichkeiten untersuchen:

Summen von Matrizen

Die Summe von zwei linearen Abbildungen A, B ist gegeben durch eine dritte lineare Abbildung C, deren Koeffizienten die Summen der Koeffizienten von A und B sind. Es gilt also:

$A + B = C$ mit $\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \left(c_{ij}\right)$

Beispiel: Matrizen addieren

Addieren Sie die beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Resultat ist natürlich:

$$C = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+2 \\ 2+1 & -1+0 \\ -2+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vielfache von Matrizen

Sie können eine Matrix mit einem Skalar k multiplizieren, indem Sie jeden Koeffizienten a_{ij} der Matrix mit diesem Skalar multiplizieren:

$kA = B$ mit $\left(ka_{ij}\right) = \left(b_{ij}\right)$

Addition und Faktor lassen sich kombinieren. Die Koeffizienten der Matrix einer Abbildung $C = kA + lB$ sind folglich $\left(c_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + lb_{ij}\right)$.

Matrizenmultiplikation

Wenn Sie lineare Abbildungen verketten, also hintereinander ausführen, können Sie die zugehörigen Matrizen multiplizieren, um daraus eine einzige zu machen. Die Matrizenmultiplikation $C = AB$ ist wie folgt definiert:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Das bedeutet, dass der Koeffizient i, k der resultierenden Matrix aus Zeile i und Spalte k der beiden zu multiplizierenden Matrizen entsteht.

Das wird viel klarer durch ein Beispiel:

Beispiel: Matrizenmultiplikation

Gegeben sind zwei Matrizen:

$$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Matrizen multiplizieren wir so:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Zeile 1 von A wird mit Spalte 1 von B ausmultipliziert und aufsummiert, um den Koeffizienten c_{11} zu errechnen: $c_{11} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) = 2$

Der Koeffizient c_{12} oben rechts verwendet die obere Zeile von Matrix A und die rechte Spalte von Matrix B:

$$c_{12} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

Und so weiter:

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 3$$

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

Das Ergebnis lautet also:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Übrigens: Eine Multiplikation einer Matrix mit sich selbst entspricht einer Potenz und kann auch genauso geschrieben werden. So ist:

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie unbedingt, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, allgemein gilt:

$$AB \neq BA$$

Falls Sie eine Gleichung umformen müssen, an der Matrizen beteiligt sind, müssen Sie unterscheiden zwischen Matrizenmultiplikation »von links« und »von rechts«. Beides ist erlaubt aber nicht dasselbe:

$$\begin{aligned} B + C &= D + E \qquad | \cdot A \\ (B + C)A &= (D + E)A \end{aligned}$$

Aber auch:

$$\begin{aligned} B + C &= D + E \qquad | A \cdot \\ A(B + C) &= A(D + E) \end{aligned}$$

Die inverse Abbildung

Zu einer bijektiven linearen Abbildung $A: V \to W$ lässt sich eine eindeutige Umkehrung finden, die ebenfalls eine lineare Abbildung A^{-1} ist. Das bedeutet, dass die Verkettung der beiden Abbildungen die Einheitsmatrix ergibt, also die Identitäts-Abbildung. In Buchstaben heißt das:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Wegen der Dimensionsformel funktioniert das nur, wenn $\dim V = \dim W$ ist.

Die zugehörige Matrix heißt *invertierbar*.

Falls eine Matrix invertierbar ist, können Sie eine Gleichung wie die folgende umformen:

$$A \cdot x = b$$

Das ist nichts anderes als ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Gesucht ist der Lösungsvektor x. Sie können diese Gleichung auf beiden Seiten von links mit der inversen Matrix A^{-1} multiplizieren:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Das Matrixprodukt aus einer Matrix und ihrer Inversen ist die Einheitsmatrix, also die Identitäts-Abbildung I:

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Damit haben Sie eine einfache Rechenvorschrift, um x zu ermitteln:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Beispiel: Matrix invertieren

Lassen Sie uns die inverse Matrix suchen zu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann eine Matrix schriftlich invertieren, indem man das Gauß-Verfahren anwendet, das Sie schon aus Abschnitt 26.1 (Unterabschnitt »Matrix-Schreibweise«) kennen. Dazu schreibt man die Koeffizienten und die Einheitsmatrix nebeneinander:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt führen Sie Gauß-Umformungen durch, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht.

Addieren Sie das −2-Fache von Zeile 1 zu Zeile 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Teilen Sie Zeile 2 durch –3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Addieren Sie das –2-Fache von Zeile 2 zu Zeile 1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Teilen Sie Zeile 1 durch 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Fertig! Die invertierte Matrix ist:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Natürlich ist es viel zu zeitraubend, eine Matrix auf diese Weise zu invertieren – für solche und andere Aufgaben gibt es zum Glück fähige Software.

Matrizenrechnung mit Sage

Natürlich müht sich niemand gerne damit ab, Matrizen von Hand auszurechnen. Außer in Übungsaufgaben wie diesen hier passiert das so gut wie nie. In vielen Anwendungen – beispielsweise beim Deep Learning – sind die Dimensionen der beteiligten Vektorräume so groß, dass man froh ist, eine Software wie Sage zu beherrschen.

Erzeugen Sie doch mal eine Matrix mit Sage:

```
sage: A=Matrix([[1,0],[2,-1],[-2,2]])
```

Und einen Vektor:

```
sage: v=vector([1,2])
```

Lassen Sie Sage die lineare Abbildung auf den Vektor anwenden, d. h. multiplizieren Sie A mit v:

```
sage: A*v
(1, 0, 2)
```

Versuchen Sie mal, eine Matrix mit Sage zu invertieren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

```
sage: A=Matrix([[2,2],[4,1]])
```

Berechnen Sie die inverse Matrix:

```
sage: A.inverse()
[-1/6  1/3]
[ 2/3 -1/3]
```

Multiplizieren Sie die Matrix A mit der gefundenen Inversen:

```
sage: A.inverse()*A
[1 0]
[0 1]
```

Langweilig? Dann multiplizieren Sie A doch mit einer anderen Matrix:

```
sage: B=Matrix([[-1,1],[0,2]])
sage: C=B*A
sage: C
[ 2 -1]
[ 8  2]
```

Invertieren Sie diese Matrix! Sie erhalten:

```
sage: C.inverse()
[ 1/6 1/12]
[-2/3  1/6]
```

Das ist übrigens identisch mit dem umgekehrten Produkt der beiden inversen Matrizen:

```
sage: A.inverse()*B.inverse()
[ 1/6 1/12]
[-2/3  1/6]
```

Es gilt also:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Auf einen Blick

Inhalt

TEIL II Analysis

TEIL III Lineare Algebra